

kg_aufgaben_13.docx

1. Weisen Sie die beiden folgenden trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis nach:
 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

Der Zeiger $-\alpha$ entsteht durch Spiegelung des Zeigers α an der x -Achse.

Der Sinus ist die Projektion der Zeigerspitze auf die y -Achse. Wenn der Zeiger an der x -Achse gespiegelt wird, dann wird auch der Sinus gespiegelt und erhält dadurch ein negatives Vorzeichen.

Der Kosinus ist die Projektion auf die x -Achse. Bei der Spiegelung des Zeigers an der x -Achse ändert sich daher nichts.

2. Ausgangspunkt ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 2$. Die Gleichung dieser Ellipse nennen Sie `ell`. Lassen Sie diese Ellipse plotten.
 - a) Die Ellipse wird durch Substitution um den Vektor $[1, 3]$ verschoben. Lassen Sie die zugehörige Gleichung erstellen, nennen Sie diese `ell_schieb` und plotten Sie diese zusammen mit `ell`.
 - b) Nun wird die erhaltene Ellipse durch Substitution um 30° gedreht. Ermitteln Sie die zugehörige Gleichung, nennen diese `ell_schieb_dreh` und plotten Sie alle seither errechneten Ellipsengleichungen.
3. Ausgangspunkt ist wieder eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 2$. Die zugehörige Gleichung ist unter dem Namen `ell` schon vorhanden.
 - a) Drehen Sie diese Ellipse durch Substitution um 30° , nennen die entstehende Gleichung `ell_dreh` und plotten beide aus.
 - b) Jetzt wird die gedrehte Ellipse durch Substitution noch um den Vektor $[1, 3]$ verschoben. Diese Gleichung nennen Sie Gleichung `ell_dreh_schieb`. Plotten Sie `ell`, `ell_dreh` und `ell_dreh_schieb`.
 - c) Sehen Sie den Unterschied dieser Vorgehensweise zu derjenigen in der vorhergehenden Aufgabe? Plotten Sie nötigenfalls `ell`, `ell_schieb`, `ell_schieb_dreh` und `ell_dreh`, `ell_dreh_schieb` in einem Fenster!
4. Vergleichen Sie schlussendlich beide erhaltenen Gleichungen `ell_schieb_dreh` und `ell_dreh_schieb`.
 - a) Können Sie anhand einer vorliegenden Gleichung erkennen, in welcher Reihenfolge beide Bewegungen ausgeführt wurden?

Nein!

- b) Woran erkennen Sie in den vorliegenden Gleichungen, dass der Kegelschnitt aus dem Koordinatenmittelpunkt verschoben wurde? Woran erkennen Sie, dass er aus einer achsenparallelen Lage herausgedreht wurde?

Koeffizienten D und E der linearen Glieder verweisen jeweils auf die Verschiebung, der Koeffizient des gemischten Glieds B auf die Drehung!

- c) Für welche prinzipielle Vorgehensweise entscheiden Sie sich, um einen beliebig platzierten Kegelschnitt wieder in die achsenparallele Mittelpunktslage zurückzubringen? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Zunächst in die achsenparallele Lage zurückdrehen, dann in den Mittelpunkt zurückschieben!

Nur die Koeffizienten der quadratischen Glieder und des gemischten Glieds sind in beiden Gleichungen dasselbe, sodass der enthaltene Drehwinkel anhand jeder Gleichung bestimmt werden kann.

5. Eine Gleichung der Form $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ beschreibt einen Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) in der Koordinatenebene. Die Gleichung eines um einen Winkel α gedrehten und um einen Vektor $[v_x, v_y]$ verschobenen Kegelschnitt hat dabei genau die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \alpha \cdot b^2 + \sin^2 \alpha \cdot a^2) \cdot x^2 \\ & + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (b^2 - a^2) \cdot xy \\ & + (\sin^2 \alpha \cdot b^2 + \cos^2 \alpha \cdot a^2) \cdot y^2 \\ & + (2 \cdot a^2 \sin \alpha \cdot v_y - 2 \cdot b^2 \cdot \cos \alpha \cdot v_x) \cdot x \\ & + (2 \cdot a^2 \cdot \cos \alpha \cdot v_y + 2 \cdot b^2 \cdot \sin \alpha \cdot v_x) \cdot y \\ & + (a^2 \cdot v_y^2 + b^2 \cdot v_x^2 - a^2 b^2) = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Beziehung $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$ kann umgekehrt aus einer solchen Gleichung der

Winkel α bestimmt werden, um welchen der Kegelschnitt aus der achsenparallelen Lage herausgedreht wurde.

- a) Bestimmen Sie für eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 2$ für alle Winkel von 0° bis 180° (in Schritten von 15°) die Werte für die Koeffizienten A , B und C . Tragen Sie diese Werte (gerundet!) in eine Tabelle nach dem folgenden Muster ein:

| Winkel | B | A | C | $B/(A-C)$ | $\frac{1}{2} \cdot a \tan\left(\frac{B}{A-C}\right)$ |
|------------|-----|-----|-----|-----------|--|
| 0° | | | | | |
| 15° | | | | | |
| 30° | | | | | |
| 45° | | | | | |
| 60° | | | | | |
| ... | | | | | |

| Winkel | B | A | C | B/(A-C) | 1/2*atan(B/(A-C)) |
|--------|---------|--------|--------|-------------|-------------------|
| 0 | 0,000 | 4,000 | 25,000 | 0,000 | 0 |
| 15 | -10,500 | 5,407 | 23,593 | 0,577 | 15 |
| 30 | -18,187 | 9,250 | 19,750 | 1,732 | 30 |
| 45 | -21,000 | 14,500 | 14,500 | 2,95549E+15 | 45 |
| 60 | -18,187 | 19,750 | 9,250 | -1,732 | -30 |
| 75 | -10,500 | 23,593 | 5,407 | -0,577 | -15 |
| 90 | 0,000 | 25,000 | 4,000 | 0,000 | -3,50979E-15 |
| 105 | 10,500 | 23,593 | 5,407 | 0,577 | 15 |
| 120 | 18,187 | 19,750 | 9,250 | 1,732 | 30 |
| 135 | 21,000 | 14,500 | 14,500 | 2,95549E+15 | 45 |
| 150 | 18,187 | 9,250 | 19,750 | -1,732 | -30 |
| 165 | 10,500 | 5,407 | 23,593 | -0,577 | -15 |
| 180 | 0,000 | 4,000 | 25,000 | 0,000 | -7,01958E-15 |

- b) Bestimmen Sie außerdem den Quotienten $B/(A-C)$ und tragen Sie diesen Wert in die vorletzte Spalte ein. In der letzten Spalte ermitteln Sie aus $B/(A-C)$ über die angegebene Beziehung wieder den Drehwinkel.

siehe Tabelle oben!

- c) Betrachten Sie zunächst nur die Tabelle im Bereich zwischen 0° und 90° ! Auf welche zwei Probleme stoßen Sie aufgrund dieser Ergebnisse, wenn Sie in einer Maximafunktion aus den Koeffizienten A , B und C einer Kegelschnittgleichung den Drehwinkel bestimmen wollen?

1. Ein Drehwinkel von 45° kann nicht ermittelt werden, da $A=C$ bei exaktem Rechnen auf eine Division durch 0 führt.
2. Da der Quotient $B/(A-C)$ für Winkel größer 45° negativ wird, werden für Winkel zwischen 45° und 90° entsprechend dem Verlauf der Tangens-Funktion negative Winkelwerte zurückgegeben.

- d) Wie müssen Sie vorgehen, um in einer solchen Maximafunktion einen Drehwinkel von 45° erkennen zu können? Beschreiben Sie Ihr Vorgehen mit eigenen Worten.

Wenn $A = C$, dann 45°

- e) Wie gehen Sie vor, um alle Winkel im Bereich zwischen 0° und 90° korrekt zu erkennen? Wieder ist nur die Beschreibung Ihres Vorgehens gefragt!

Wenn Winkel w negativ, dann $w:90+w$

- f) Wieso kann ein Drehwinkel von 90° prinzipiell nicht erkannt werden?

Bei einer Drehung um 90° verschwindet das gemischte Glied aus der Gleichung bzw. tritt nicht auf, B ist in einem solchen Fall also gleich 0. Eine um 90° gedrehte Ellipse oder Hyperbel mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 2$ ist dasselbe wie eine Ellipse/Hyperbel mit den Halbachsen $a = 2$ und $b = 5$.

- g) Nun betrachten Sie die gesamte Tabelle bis 180° . Wie können Sie unterscheiden, ob der Drehwinkel innerhalb des ersten oder des zweiten Quadranten liegt?

Für Winkel von 0° bis 90° ist der Koeffizient B negativ, für Winkel von 90° bis 180° ist er positiv!

- h) Beschreiben Sie schließlich, wie ein Drehwinkel im Bereich von 0° bis 180° (mit Ausnahme von 90°) korrekt erkannt werden kann.

Wenn $B > 0$ dann $w:w+90$

- i) Wieso ist es unnötig, weitere Betrachtungen über den Bereich zwischen 180° und 360° anzustellen?

Drehwinkel um α und $(\alpha+180^\circ)$ sind aufgrund der Symmetrie von Ellipse und Hyperbel nicht unterscheidbar.

- j) Bestimmen Sie schließlich den korrekten Drehwinkel aus den Gleichungen

$$1: 79x^2 - 42\sqrt{3}xy + 37y^2 - 400 = 0 \text{ und}$$

$$2: 37x^2 + 42\sqrt{3}xy + 79y^2 - 400 = 0$$

Fall 1: 60° , Fall 2: 150°

6. Untersuchen Sie nun auf genau dieselbe Weise wie in der vorhergehenden Aufgabe eine Hyperbel mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 2$ für alle Winkel von 0° bis 180° in Schritten von 15° .

- a) Tragen Sie die zugehörigen Werte wieder in eine Tabelle nach obigem Muster ein.

| Winkel | B | A | C | A-C | $B/(A-C)$ | $1/2 * \text{atan}(B/(A-C))$ |
|--------|--------------|---------|---------|-------------|--------------|------------------------------|
| 0 | 0 | 4 | -25 | 29 | 0 | 0 |
| 15 | 14,5 | 2,057 | -23,057 | 25,11473671 | 0,577 | 15 |
| 30 | 25,11473671 | -3,25 | -17,75 | 14,5 | 1,732 | 30 |
| 45 | 29 | -10,5 | -10,5 | 0 | 4,08139E+15 | 45 |
| 60 | 25,11473671 | -17,75 | -3,25 | -14,5 | -1,732050808 | -30 |
| 75 | 14,5 | -23,057 | 2,057 | -25,114 | -0,577 | -15 |
| 90 | 3,55293E-15 | -25 | 4 | -29 | -1,22515E-16 | -3,50979E-15 |
| 105 | -14,5 | -23,057 | 2,057 | -25,115 | 0,577 | 15 |
| 120 | -25,115 | -17,75 | -3,25 | -14,5 | 1,732 | 30 |
| 135 | -29 | -10,5 | -10,5 | 0 | 4,08139E+15 | 45 |
| 150 | -25,115 | -3,25 | -17,75 | 14,5 | -1,732 | -30 |
| 165 | -14,5 | 2,057 | -23,057 | 25,115 | -0,577 | -15 |
| 180 | -7,10586E-15 | 4 | -25 | 29 | -2,4503E-16 | -7,01958E-15 |

b) Wie können Sie hier Drehwinkel von 45° erkennen?

Wenn $A = C$, dann 45°

c) Wie gehen Sie vor, um alle Winkel im Bereich zwischen 0° und 90° korrekt zu erkennen?
Wieder ist nur die Beschreibung Ihres Vorgehens gefragt!

Wenn Winkel w negativ, dann $w:90+w$

d) Wieso kann ein Drehwinkel von 90° prinzipiell nicht erkannt werden?

Bei einer Drehung um 90° verschwindet das gemischte Glied aus der Gleichung bzw. tritt nicht auf, B ist in einem solchen Fall also gleich 0. Eine um 90° gedrehte Ellipse oder Hyperbel mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 2$ ist dasselbe wie eine Ellipse/Hyperbel mit den Halbachsen $a = 2$ und $b = 5$.

e) Nun betrachten Sie die gesamte Tabelle bis 180° . Wie können Sie unterscheiden, ob der Drehwinkel innerhalb des ersten oder des zweiten Quadranten liegt?

Für Winkel von 0° bis 90° ist der Koeffizient B positiv, für Winkel von 90° bis 180° ist er negativ!

f) Beschreiben Sie schließlich, wie ein Drehwinkel im Bereich von 0° bis 180° (mit Ausnahme von 90°) korrekt erkannt werden kann.

Wenn $B < 0$ dann $w:w+90$

g) Vergleichen Sie Ihre in e) und f) gemachten Aussagen mit den zugehörigen Aussagen aus der vorhergehenden Aufgabe. Ist es möglich oder überhaupt sinnvoll, eine doppelt quadratische Gleichung auf Drehwinkel größer als 90° zu untersuchen?

Dies ist nur mit einem hohen Aufwand möglich, andererseits nicht sinnvoll bzw. nötig. Das Erkennen von Drehwinkeln zwischen 0° und 90° reicht aus, da beispielsweise eine um 120° gedrehte Ellipse $[a, b]$ dasselbe ist wie eine um 30° gedrehte Ellipse $[b, a]$.

7. Drehen Sie die Ellipse mit den Halbachsen $[7, 3]$ um 120° .

a) Wie lautet die zugehörige Gleichung?

$$39x^2 + 20\sqrt{3}xy + 19y^2 - 441 = 0$$

b) Bestimmen Sie aus dieser Gleichung mit Hilfe des oben Diskutierten den Drehwinkel.

30°

- c) Drehen Sie die erhaltene Gleichung um den ermittelten Drehwinkel zurück. Welche Gleichung erhalten Sie?

$$49x^2 + 9y^2 - 441 = 0$$

- d) Bestimmen Sie aus dieser Gleichung die Halbachsen a und b .

$$a = 3, b = 7$$

8. Gegeben ist die Gleichung

$$252x^2 + 216\sqrt{3}xy + 468y^2 - (1008 + 1080\sqrt{3})x - (4680 + 432\sqrt{3})y + (7524 + 2160\sqrt{3}) = 0$$

- a) Woran erkennen Sie, dass der zugehörige Kegelschnitt aus der achsenparallelen Lage herausgedreht wurde?

Am gemischten Glied

- b) Wie groß ist dieser Drehwinkel?

$$60^\circ$$

- c) Wie lautet die Gleichung des Kegelschnitts, wenn Sie diesen in die achsenparallele Lage zurückdrehen?

$$576x^2 + 144y^2 - (1152 + 2880\sqrt{3})x - (720 - 288\sqrt{3})y + (7524 + 2160\sqrt{3}) = 0$$

- d) Mit welchem Vektor können Sie den Kegelschnitt in die achsenparallele Mittelpunktslage zurückschieben?

$$[-5.330, -0.768]$$

- e) Wie lautet die Gleichung des in die achsenparallele Mittelpunktslage zurückgeschobenen Kegelschnittes?

$$576x^2 + 144y^2 - 5184 = 0 \quad \text{dividieren durch 5184 liefert: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} - 1 = 0$$

- f) Wie groß sind die Halbachsen des Kegelschnitts?

$$a = 3, b = 6$$

9. Nachfolgend finden Sie einige doppelt-quadratische Gleichungen. Geben Sie für jede Gleichung den Drehwinkel an, um welchen Sie das zugrundeliegende Objekt in die achsenparallele Lage zurückdrehen müssen, außerdem den Vektor, um welchen Sie das achsenparallele Objekt in die Hauptachsenlage zurückschieben müssen. Geben Sie schließlich an, um was für ein Objekt es sich handelt und nennen Sie dessen Werte für die zugehörigen Halbachsen a und b .

a) $9,25x^2 - 18,19xy + 19,75y^2 - 37,31x + 15,06y - 51,56 = 0$

Winkel: 30° , Vektor: $[-3.1, 0.63]$, Ellipse, $[5, 2]$

b) $20943430,91x^2 - 25636373,56xy + 14551565,09y^2 + 26276220161,12x - 18214675686,37y - 132042520682637,2 = 0$

Winkel: 52° , Vektor: $[201.01, -515.54]$, Ellipse, $[5564, 2130]$

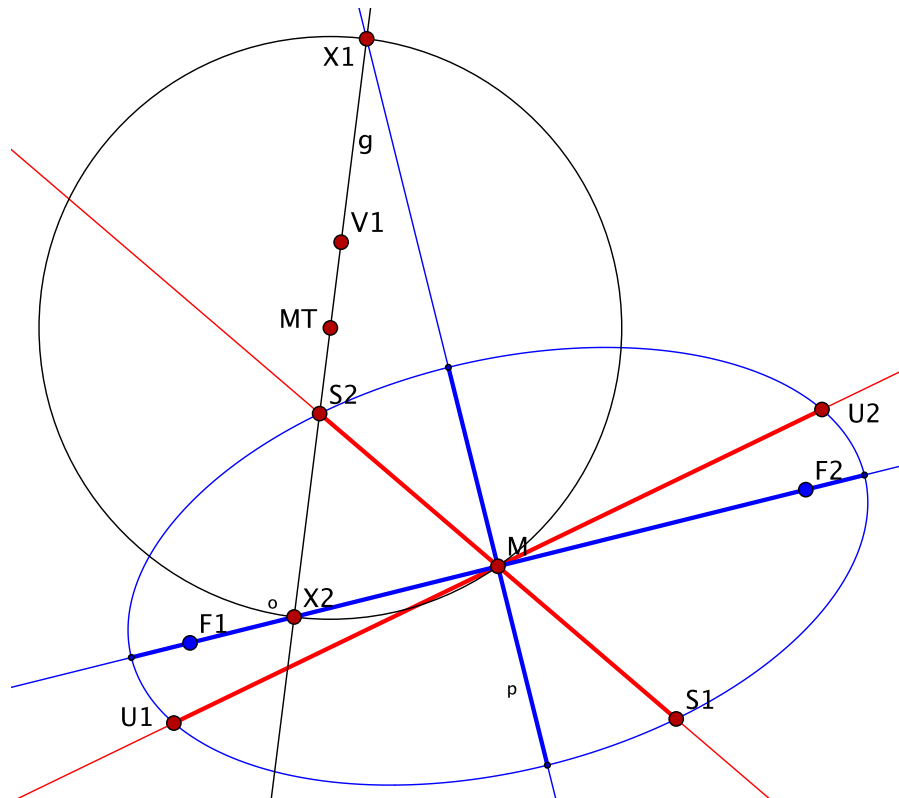
c) $-1,36x^2 + 44,43xy - 38,64y^2 - 111,55x - 123,60y + 190,58 = 0$

Winkel: 25° , Vektor: $[-8.52, 0.66]$, Hyperbel, $[7, 3]$

d) $16,14x^2 - 30,64xy + 41,86y^2 + 240,98x - 644,55y + 2041 = 0$

Winkel: 25° , Vektor: $[-3, -7]$, Ellipse, $[7, 3]$

10. Laden Sie die Anlage *kg_aufgaben_13_rytz.pdf* von der Homepage des Buchs und ermitteln Sie konstruktiv über die *Rytz'sche Achsenkonstruktion* die Haupt- und Nebenachse der abgebildeten Ellipse.



Man bestimmt zwei beliebige konjugierte Durchmesser der Ellipse, indem man zwei Parallelen durch die Ellipse zeichnet und die Mittelpunkte der von der Ellipse ausgeschnittenen Strecken verbindet. Dies ergibt einen Durchmesser U_1U_2 .

Den dazu konjugierten Durchmesser S_1S_2 findet man, indem man U_1U_2 halbiert und durch diesen Ellipsenmittelpunkt M eine weitere Parallele zeichnet.

Nun wird U_1 um 90° gedreht. Dazu schneidet man einen Kreis um M mit dem Radius MU_1 mit der Senkrechten zu U_1M durch M . Ein Schnittpunkt sei V_1 .

Jetzt wird der Mittelpunkt M_T von V_1 und S_2 bestimmt und um diesen Mittelpunkt ein Kreis um M_T mit dem Radius M_TM gezeichnet.

Dieser Kreis schneidet die Gerade V_1S_2 in den Punkten X_1 und X_2 .

Die Gerade durch M und X_2 ist die große Halbachse, die Gerade durch M und X_1 ist die kleine Halbachse der Ellipse.

- a) Bestimmen Sie durch Messen die Längen der Halbachsen a und b .

$$a \approx 5.7, b \approx 2.4$$

- b) Errechnen Sie daraus die lineare Exzentrizität e und zeichnen Sie die Brennpunkte der Ellipse ein.

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 5.2$$