

## kg\_aufgaben\_14.docx

1. Gegeben ist eine Ellipse mit den Hauptachsen  $a = 7$  und  $b = 3$ .

- a) Welche Ellipsenpunkte haben die  $y$ -Koordinate 2 (die  $y$ -Koordinate  $-1.5$ )? Wie gehen Sie algebraisch vor? Welchem geometrischen Vorgehen entspricht dies?

Algebraisch: In der Ellipsengleichung  $y$  durch den entsprechenden Wert ersetzen und nach  $x$  auflösen. Geometrisch: Schnitt der Ellipse mit einer Parallelen zur  $x$ -Achse.

$$y = 2: [-5.217, 5.217] \quad y = -1.5: [-6.062, 6.062]$$

- b) Welche Ellipsenpunkte haben die  $x$ -Koordinate 5 (die  $x$ -Koordinate  $-3$ )? Wie gehen Sie algebraisch vor? Welchem geometrischen Vorgehen entspricht dies?

Algebraisch: In der Ellipsengleichung  $x$  durch den entsprechenden Wert ersetzen und nach  $y$  auflösen. Geometrisch: Schnitt der Ellipse mit einer Parallelen zur  $y$ -Achse.

$$x = 5: [-2.1, 2.1], \quad x = -3: [-2.711, 2.711]$$

- c) Welche Schnittpunkte hat die Ellipse mit der Geraden  $g: y = 2x + 5$ ?

$$[-3.765, -2.529] \text{ und } [-1.016, 2.968]$$

- d) Welche Schnittpunkte hat die Ellipse mit der Geraden  $h: y = -\frac{1}{2}x - 4$ ?

$$[[-6.8, -0.56], [-2.35, -2.83]]$$

- e) Welche Schnittpunkte hat die Ellipse mit der Geraden  $k: y = -\frac{3}{10}x - 4$ ?

Keine!

- f) Welche Schnittpunkte hat die Ellipse mit einem Kreis um  $M: [-2, 3]$  mit dem Radius  $r = 6$ ?

$$[-5.6, -1.8], [-1.244, -2.952], [3.976, 2.469] \text{ und } [-6.932, -0.417]$$

- g) Welche Schnittpunkte hat die Ellipse mit einem Kreis um  $M: [5, 4]$  mit dem Radius  $r = 3$ ?

$$[2.232, 2.843] \text{ und } [6.308, 1.3] \text{ sowie zwei weitere Schnittpunkte im Komplexen.}$$

- h) Welche Schnittpunkte hat die Ellipse mit einer Hyperbel  $[a, b]: [6, 2]$ ?

$$[-6.641, -0.949], [-6.640, 0.949], [6.640, -0.949], [6.640, 0.949]$$

2. Gegeben ist eine Ellipse mit  $[a, b]: [5, 2]$ .

- a) Verschieben Sie diese Ellipse um den Vektor  $[3, 1]$ . Wie lautet die zugehörige Gleichung?

$$4x^2 - 24x + 25y^2 - 50y - 39 = 0$$

- b) Drehen Sie die Ausgangsellipse um  $30^\circ$ . Wie lautet die zugehörige Gleichung?

$$\frac{37}{4}x^2 - \frac{7\sqrt{27}}{2}xy + \frac{79}{4}y^2 - 100 = 0$$

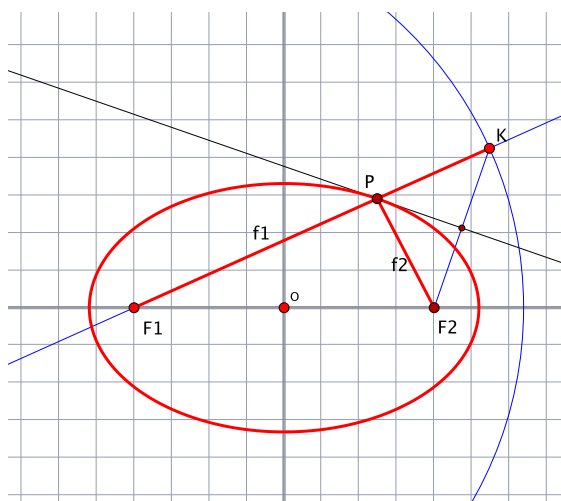
- c) Welche Schnittpunkte haben die verschobene und die gedrehte Ellipse gemeinsam?

$$[x = 2.161, y = -0.972], [x = -1.995, y = 1.092], [x = 2.259, y = 2.978], [x = 3.552, y = 2.988]$$

Maxima liefert mit `solve()` nur dann ein Ergebnis, wenn zuvor die Koeffizienten der Gleichung der gedrehten Ellipse mittels `float()` in Fließkommazahlen umgewandelt werden!!!

3. Gegeben sind zwei Punkte  $F_1$  und  $F_2$ . Zeichnen Sie einen Kreis so um  $F_1$ , dass auch  $F_2$  innerhalb dieses Kreises liegt. Zeichnen Sie eine Gerade durch  $F_1$  und einen beliebigen Kreispunkt  $K$ . Konstruieren Sie die Mittelsenkrechte von  $KF_2$ . Der Schnittpunkt der Geraden

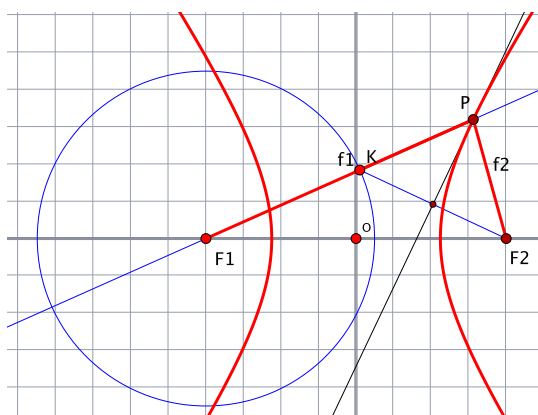
$F_1K$  und der Mittelsenkrechten von  $F_2K$  sei  $P$ . Wenn Sie  $K$  ringsum auf dem Kreis bewegen, auf welcher Bahn verläuft dann  $P$ ? Begründen Sie Ihre Meinung!



Der Streckenzug  $F_1PF_2$  hat immer dieselbe Länge  $F_1K$ , da  $PF_2$  das Spiegelbild von  $PK$  bezüglich der Mittelsenkrechten von  $F_2K$  ist.

Die Strecke, um die  $F_1P$  größer wird, wird  $F_2P$  kleiner. (Gegensinniges Verändern)

4. Verändern Sie die Konstruktion so, dass die Kreislinie zwischen  $F_1$  und  $F_2$  verläuft. Welche Bahn erzeugt nun der Punkt  $P$ , wenn Sie  $K$  auf dem Kreis bewegen? Können Sie auch diesen Fall begründen?



Die Differenz der Strecken  $F_1P$  und  $PF_2$  ist immer gleich  $F_1K$ , da  $PK$  und  $PF_2$  Spiegelbilder bezüglich der Mittelsenkrechten sind.

Die Strecke, um die  $F_1P$  größer wird, wird auch  $F_2P$  größer. (Gleichsinniges Verändern)

5. Überlegen Sie, wozu die so genannte *Leitkreiskonstruktion* hilfreich sein können. Spielen Sie dazu einfach in Cinderella mehrere Fälle durch und beobachten Sie die beteiligten Objekte.

Die Mittelsenkrechte ist immer die Tangente an die Ellipse bzw. Hyperbel.

- a) Zeigen Sie in einer Skizze, wie Sie an eine Ellipse (mit geg. Brennpunkten) eine Tangente konstruieren können, welche durch einen gegebenen Punkt  $P$  auf der Ellipse verläuft.

Gerade  $g$  durch  $F_1P$ .

Kreis  $k$  um  $P$  mit  $r = PF_2$

$k$  geschnitten mit  $g$  ist  $K$

Mittelsenkrechte von  $F_2K$  ist die gesuchte Tangente.

- b) Zeigen Sie in einer weiteren Skizze, wie Sie an eine Ellipse eine Tangente konstruieren können, welche durch einen gegebenen Punkt  $Q$  außerhalb der Ellipse verläuft.

Leitkreis  $k_1$  um  $F_1$

Kreis  $k_2$  um  $Q$  mit  $r = QF_2$

Kreise  $k_1$  und  $k_2$  schneiden, ergibt  $K_1$  und  $K_2$

Die Mittelsenkrechten von  $F_2K_1$  und  $F_2K_2$  sind die gesuchten Tangenten.

6. Sie sollen eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = 5$  und  $b = 2$  in der ersten Hauptachsenlage mit Hilfe der Leitkreiskonstruktion zeichnen.

a) Wie gehen Sie vor?

Man errechnet aus  $[a, b]$  die „Fadenlänge  $l$ “ und den halben Brennpunktabstand, in diesem Fall ist  $l = 10$  und  $e = \sqrt{21} \approx 4,583$ . Damit setzt man die Brennpunkte auf die  $x$ -Achse bei  $\pm\sqrt{21}$  und schlägt einen Kreis mit dem Radius 10 um  $F_1$ . Der Rest nach Konstruktionsvorschrift.

b) Ermitteln Sie einen Ellipsenpunkt mit der  $x$ -Koordinate 3 und konstruieren Sie durch diesen Punkt eine Tangente an die Ellipse. Wie lautet deren Geradengleichung?

Tangentenpunkt  $T$ :  $[3, 8/5]$  oder  $[3, -8/5]$

Gerade  $F_1T$ :  $y = 0.221x + 0.967$

Kreis mit Radius  $TF_2$ : Distanz ist 2.25, Kreis:  $[T, 2.25]$

Kreis mit Gerade schneiden:  $[[0.798, 1.135], [5.202, 2.065]]$ , der zweite Punkt ist der hier interessierende Punkt  $K$  auf dem Leitkreis.

oder: Leitkreis mit  $r = 2a$  um  $F_1$  zeichnen und mit der Geraden  $F_1T$  schneiden um  $K$  zu erhalten!

Gesucht ist nun die Tangente als Mittelsenkrechte von  $KF_2$ :  $y = -0.3x + 2.5$

c) Wie gehen Sie vor, wenn Sie eine Hyperbel mit den Halbachsen  $a = 5$  und  $b = 2$  in der ersten Hauptachsenlage mit Hilfe der Leitkreiskonstruktion zeichnen sollen?

Wieder werden die Abstandsdifferenz und der halbe Brennpunktabstand aus  $a$  und  $b$  berechnet, dies ist 10 und Wurzel(29) = 5.385. Damit werden die Brennpunkte auf die  $x$ -Achse bei  $\pm 5.385$  platziert und ein Kreis mit  $r = 10$  um  $F_1$  gezeichnet. Der Rest wie zuvor...

d) Ermitteln Sie einen Hyperbelpunkt mit der  $x$ -Koordinate 8 und konstruieren Sie durch diesen Punkt eine Tangente an die Hyperbel. Wie lautet deren Geradengleichung?

$T$ :  $[8, 2.5]$

Gerade  $F_1T$ :  $y = 0.187x + 1.005$

Leitkreis um  $F_1$  mit Radius 10 mit Gerade  $F_1T$  schneiden:  $K$ :  $[4.445, 1.835]$

Tangente = Mittelsenkrechte  $F_2K$ :  $y = 0.512x - 1.601$

7. Gegeben ist der Punkt  $P$ :  $[7, 3]$ .

a) Konstruieren Sie die Tangenten von  $P$  aus an die in der vorhergehenden Aufgabe gegebenen Ellipse  $[a, b]$ :  $[5, 2]$ . Geben Sie alle Zwischenschritte und –ergebnisse dezimal an!

Leitkreis um  $F_1$  mit Radius 10

Kreis um  $P$  mit Radius des Abstands von  $PF_2$ :  $r = 3.852$

Beide Kreise schneiden, ergibt Kreispunkte  $K_1$ :  $[3.903, 5.291]$  und  $K_2$ :  $[5.405, -0.507]$

Die Mittelsenkrechten  $PK_1$  bzw.  $PK_2$  sind die gesuchten Tangenten:

$t_1$ :  $[0.128, 2.101]$

$t_i$ :  $[1.622, -8.351]$

b) Konstruieren Sie ebenso die Tangenten an eine Hyperbel mit den Hauptachsen  $a = 5$  und  $b = 2$ . Geben Sie alle Zwischenschritte und –ergebnisse an!

Leitkreis um  $F_1$  mit Radius  $d=10$

Kreis um  $P$  mit Radius (Abstand  $PF_2$ ) = 3.407

Beide Kreise schneiden ergibt die beiden Kreispunkte

$K_1$ :  $[3.758, 4.049]$  und  $K_2$ :  $[4.598, 0.584]$

Die Mittelsenkrechten  $F_2K_1$  und  $F_2K_2$  sind die gesuchten Tangenten:

$t_1$ :  $[0.402, 0.188]$  und  $t_2$ :  $[1.348, -6.438]$

8. Schneidet man einen Kegel mit einer Ebene, so entsteht je nach Schnittwinkel als Schnittkante eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel.
- a) Die so genannte *Gärtnerkonstruktion* ist eine Möglichkeit, eine Ellipse zu konstruieren. Geben Sie an, wie die Ellipse als Punktmenge definiert ist und begründen Sie mit dieser Definition, dass die „Gärtnerkonstruktion“ eine korrekte Konstruktionsmethode ist.

Ellipse als Menge aller Punkte, welche zu zwei Punkten eine konstante Abstandssumme haben. Der Faden bei der Gärtnerkonstruktion realisiert die konstante Abstandssumme. Wird er mit seinen Enden an den Brennpunkten festgemacht, so erzeugt er unter Spannung alle Ellipsenpunkte.

- b) Zum Erzeugen einer Ellipse mit Hilfe der Gärtnerkonstruktion müssen bestimmte Größen vorgegeben werden. Andererseits werden Ellipsen auch durch die Angabe ihrer Halbachsen  $a$  und  $b$  festgelegt. Geben Sie an, wie man aus den für die Gärtnerkonstruktion notwendigen Größen die Längen der Halbachsen bestimmen kann. Geben Sie umgekehrt auch an, wie man aus vorgegebenen Halbachsen  $a$  und  $b$  die für die Gärtnerkonstruktion notwendigen Größen bestimmen kann.

Sind die Parameter  $a$  und  $b$  gegeben, so berechnet sich die Fadenlänge nach

$$l = 2a,$$

der Abstand der Brennpunkte beträgt

$$2e = 2\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ist umgekehrt die Fadenlänge  $l$  und der Brennpunktabstand  $2e$  gegeben, so bestimmt man die Länge der großen Halbachse  $a$  nach

$$a = 0,5 \cdot l$$

Die Länge der kleinen Halbachse  $b$  errechnet sich aus

$$b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

- c) Gegeben ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = 7$  und  $b = 3$ . Bestimmen Sie konkret die für eine Gärtnerkonstruktion notwendigen Größen.

`ellipse_ab_le([7,3]);`

$$\left[14, 2\sqrt{10}\right]$$

- d) Neben der Gärtnerkonstruktion kann eine Ellipse auch mit Hilfe eines Leitkreises konstruiert werden. Leiten Sie die *Leitkreiskonstruktion* aus der Gärtnerkonstruktion ab und geben Sie die Konstruktionsvorschrift der Leitkreiskonstruktion an.

Nach Definition ist die Summe der Längen  $f_1$  und  $f_2$  konstant, es gilt

$$f_1 + f_2 = 2a$$

Wenn man nun die Strecke  $f_2$  direkt und in derselben Richtung an  $f_1$  ansetzt, erhalten wir die Strecke  $F_1K$ , ebenfalls mit der Länge  $2a$ . Alle Punkte  $K$  beschreiben daher einen Kreis um  $F_1$  mit dem Radius  $2a$ .

Es ist zudem so, dass die Strecken  $PK$  und  $PF_2$  gleich lang sind. Damit ist der Punkt  $P$  gleich weit von  $F_2$  wie vom Kreis (um  $F_1$  mit Radius  $2a$ ) entfernt, was zur folgenden Definition einer Ellipse führt:

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte  $P$ , welche von einem Punkt  $F_2$  denselben Abstand haben wie von einem Kreis um den Punkt  $F_1$  mit dem Radius  $2a$ .

Da hier der Kreis maßgeblich für die Konstruktion der Ellipse ist, nennt man diese Definition auch die Leitkreisdefinition, bzw. die entsprechende Konstruktion die Leitkreiskonstruktion.

Bei dieser Leitkreiskonstruktion zeichnet man einen Kreis mit Radius  $2a$  um  $F_1$ . Dann konstruiert man für einen Punkt  $K$  auf diesem Kreis die Mittelsenkrechte von  $K$  und  $F_2$ . Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten mit dem Radius  $F_1K$  ist der zu  $K$  zugehörige Ellipsenpunkt.

- e) Die Gleichung  $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$  beschreibt allgemein eine Ellipse oder eine Hyperbel in achsenparalleler Mittelpunktslage. Leiten Sie die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes her, der aus dieser Lage achsenparallel um den Vektor  $[p, q]$  verschoben wurde.

Verschieben wir um  $[p, q]$ , so erhalten wir

$$A(u-p)^2 + C(v-q)^2 + F = 0$$

$$A(u^2 - 2up + p^2) + C(v^2 - 2vq + q^2) + F = 0$$

$$Au^2 - 2Apu + Ap^2 + Cv^2 - 2Cvq + Cq^2 + F = 0$$

$$Au^2 - 2Apu + Cv^2 - 2Cvq + F + Ap^2 + Cq^2 = 0$$

Da mit  $u$  und  $v$  die Koordinaten im alten System bezeichnet werden, kann man auch schreiben:

$$Ax^2 - 2Apx + Cy^2 - 2Cqy + F + Ap^2 + Cq^2 = 0$$

Letztlich erhalten wir damit eine Gleichung der Form

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F' = 0$$

Eine Gleichung dieser Form stellt somit einen achsenparallel verschobenen Kegelschnitt dar.

- f) Die Hyperbel mit  $a = 4$  und  $b = 6$  soll um den Vektor  $[2, -3]$  achsenparallel verschoben werden. Wie lautet die konkrete Gleichung dieser Hyperbel?

```
(%i3) ks_transform([4,-6],[2,-3],0);
```

```
(%o3) -y^2/36-y/6+x^2/16-x/4-1=0
```

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{36}y^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y - 1 = 0$$

- g) Gegeben ist die Gleichung

$$43x^2 - 12\sqrt{3}xy + 31y^2 + (430 + 36\sqrt{3})x - (186 + 60\sqrt{3})y + (129 + 180\sqrt{3}) = 0$$

eines Kegelschnittes. Bestimmen Sie den Winkel, um den der Kegelschnitt aus seiner achsenparallelen Lage gedreht wurde und geben Sie die Gleichung des um diesen Winkel zurückgedrehten Kegelschnittes an.

```
(%i25) drehwinkel(ks);
```

```
(%o25) 60.0
```

```
(%i28) ks_rueckdrehen_dw(ks,60);
```

```
(%o28) y^2/25-(sqrt(3)*y)/5-(3*y)/25+x^2/49-
```

```
(3*sqrt(3)*x)/49+(5*x)/49+(36*sqrt(3))/245+129/1225=0
```

$$\frac{1}{49}x^2 + \frac{1}{25}y^2 + \frac{5-3\sqrt{3}}{49}x - \frac{3+5\sqrt{3}}{25}y + \frac{129+180\sqrt{3}}{1225} = 0$$

- h) Bestimmen Sie den Verschiebungsvektor, um welchen der im vorhergehenden Schritt berechnete achsenparallele Kegelschnitt aus seiner Mittelpunktslage verschoben wurde und geben Sie die Gleichung des in die achsenparallele Mittelpunktslage zurückgeschobenen Kegelschnittes an

Bestimmung durch `schiebevektor()`

$$\left[ \frac{49\left(\frac{5}{49} - \frac{3\sqrt{3}}{49}\right)}{2}, \frac{25\left(\frac{-\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{25}\right)}{2} \right] = \left[ \frac{49\left(\frac{5}{49} - \frac{3\sqrt{3}}{49}\right)}{2}, \frac{25\left(\frac{-5\sqrt{3}}{25} - \frac{3}{25}\right)}{2} \right] = \left[ \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-5\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= [-0.0980762..., -5.830127...]$$

Gleichung

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0$$

9. Für die Konstruktion einer Ellipse in der Umwelt wird häufig die sogenannte „Gärtnerkonstruktion“ verwendet.

- a) Beschreiben Sie exakt die Vorgehensweise bei der „Gärtnerkonstruktion“ und stellen Sie diese in den direkten Zusammenhang mit der Definition einer Ellipse.

Bei der Gärtnerkonstruktion wird eine Schnur fester Länge mit deren Enden an zwei Pflöcke geknotet. Die Pflöcke werden in einem Abstand, der kleiner als die Schnurlänge ist, im Boden befestigt. Hält man die Schnur immer unter Zug, so beschreibt die Ortslinie eine Ellipse.

Damit wird die Definition einer Ellipse umgesetzt als Menge aller Punkte, deren Abstandssumme zu zwei gegebenen (Brenn-)Punkten konstant ist. Die konstante Abstandssumme wird dabei durch die feste Schnurlänge realisiert, die Brennpunkte sind die Einschlagpunkte der Pflöcke.

- b) Kenngrößen einer Ellipse sind die Halbachsen  $a$  und  $b$ , der doppelte Brennpunktabstand  $2e$  sowie die „Schnurlänge“  $l$ . Leiten Sie möglichst anschaulich die Zusammenhänge zwischen diesen Kenngrößen her und geben Sie an, wie man aus der Kenntnis von  $a$  und  $b$  die Größen  $e$  und  $l$  bestimmen kann – und umgekehrt!

Spannt man die Schnur genau in Fluchtrichtung der beiden Brennpunkte, so wird daraus der Zusammenhang

$$l = 2a \quad (1)$$

deutlich. Spannt man die Schnur hingegen auf die Mittelsenkrechte der beiden Brennpunkte, so wird  $l$  genau halbiert und damit jeweils gleich  $a$ . Es entsteht der Zusammenhang

$$b^2 + e^2 = a^2 \quad (2)$$

Sind  $e$  und  $l$  gegeben, so folgt aus (1) sofort:

$$a = \frac{1}{2} \cdot l$$

Nun kann aus (2)  $b$  berechnet werden:

$$b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

Sind  $a$  und  $b$  gegeben, so folgt aus (1) sofort:

$$l = 2a$$

und aus (2):

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

- c) Entwickeln Sie aus der „Gärtnerkonstruktion“ die „Leitkreiskonstruktion“ einer Ellipse. Stellen Sie dabei besonders heraus, wie die Definition der Ellipse in der Leitkreiskonstruktion zum Ausdruck kommt bzw. dass die Leitkreiskonstruktion die Forderungen der Definition erfüllt.

Bewegt man sich im Abstand der „konstanten Schnurlänge“  $l=2a$  um einen Brennpunkt  $F_1$ , so beschreibt man einen Kreis, den sog. Leitkreis. Errichtet man vom anderen Brennpunkt  $F_2$  aus zu jedem beliebigen Punkt  $K$  auf dem Leitkreis die Mittelsenkrechte, so schneidet diese Mittelsenkrechte den Radius  $F_1K$  im Punkt  $E$ . Dieser Punkt  $E$  ist Ellipsenpunkt, da er die Definition der Ellipse erfüllt: Die Mittelsenkrechte auf  $F_2K$  ist Spiegelachse der beiden Punkte  $F_2$  und  $K$  und – da  $E$  auf der Mittelsenkrechten liegt – auch der Strecken  $EF_2$  und  $EK$ .  $EF_2$  ist damit gleich lang wie  $EK$  und damit ist der Streckenzug  $F_1EF_2$  genau so lang wie der feste Radius  $F_1K$ . Die Summe der Abstände von  $E$  zu den beiden Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  ist daher konstant.

- d) Gegeben sind die Punkte  $F_1[2, 3]$  und  $F_2[10, 3]$ . Der Mittelpunkt des Leitkreises sei  $F_1$ , dessen Radius betrage 10. Wie lauten die Kenngrößen  $a$ ,  $b$  sowie  $e$  und  $l$ , der mit Hilfe dieser Leitkreiskonstruktion konstruierbaren Ellipse?

Doppelter Brennpunktabstand: 8, also  $e = 4$

Leitkreisradius =  $l$ , also  $l = 10$

außerdem:  $l = \text{Abstandssumme} = 2a$ , also  $a = 5$

schließlich folgt für  $b$ :  $a^2 = b^2 + e^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

- e) Wie lautet die Gleichung dieser Ellipse? Geben Sie an, wie Sie zu dieser Ellipsengleichung gelangt sind!

Die durch die Leitkreiskonstruktion konstruierte Ellipse ist um den Vektor  $[6, 3]$  aus der Mittelpunktslage verschoben. Die Gleichung dieser verschobenen Ellipse kann nach Kenntnis des Verschiebungsvektors durch Maxima bestimmt werden. Sie lautet:

$$9x^2 + 25y^2 - 108x - 150y + 324 = 0$$

- f) Beschreiben Sie zwar allgemein aber doch kleinschrittig und exakt, wie die beiden Tangenten durch einen Punkt  $P$  an eine Ellipse konstruiert werden können. Vorgegeben sind eine Ellipse mit ihren beiden Brennpunkten sowie deren Halbachsen, außerdem ein Punkt  $P$ , durch welche die beiden Tangenten an die Ellipse konstruiert werden sollen. Es ist sicher hilfreich, Ihre Darstellung durch eine Skizze zu unterstützen.

Durch die vorgegebene große Halbachse kennt man den Radius des Leitkreises, dieser ist genau doppelt so groß. Man zeichnet zunächst den Leitkreis um den Brennpunkt  $F_1$ . Dann schlägt man einen Kreis  $k$  um den Punkt  $P$ , der durch den anderen Brennpunkt  $F_2$  geht. Die Schnittpunkte dieses Kreises  $k$  mit dem Leitkreis seien die Punkte  $S_1$  und  $S_2$ . Die Mittelsenkrechten von  $F_2S_1$  und  $F_2S_2$  sind die gesuchten Tangenten.

- g) Begründen Sie, warum die von Ihnen angeführte Konstruktion die beiden gesuchten Tangenten liefert.

Diese Tangentenkonstruktion findet ihre Begründung allgemein in der Leitkreiskonstruktion. Der Punkt  $P$  ist vorgegeben, dieser liegt auf der Tangente. Was nun noch benötigt wird, sind die Spiegelpunkte  $S_1$  und  $S_2$  von  $F_2$  auf dem Leitkreis. Wenn aber  $S_1$  und  $S_2$  Spiegelpunkte von  $F_2$  bezüglich der Tangente sein sollen, dann müssen die Strecken  $PF_2$ ,  $PS_1$  und  $PS_2$  alle gleich lang sein, d.h. auf einem Kreis um  $P$  mit dem Radius  $PF_2$  liegen. Da sie außerdem auf dem Leitkreis liegen müssen, liefert der Schnitt beider Kreise die gesuchten Punkte  $S_1$  und  $S_2$ .

- h) Geben Sie schließlich an, wie Sie die Berührungspunkte der beiden Tangenten mit der Ellipse exakt finden können.

Verbindet man den anderen Brennpunkt  $F_1$  jeweils mit  $S_1$  und  $S_2$ , so ist der Schnittpunkt dieser Strecken mit der jeweiligen Mittelsenkrechten genau der Berührungspunkt der zugehörigen Ellipse.

- i) Wie lauten die Geradengleichungen der beiden Tangenten durch den Punkt  $P:[15, -2]$  an die in Teilaufgabe d) bzw. e) beschriebene Ellipse?

Tangente 1:  $y = -0,2x + 1,05$

Tangente 2:  $y = -1,4x + 19,05$

10. Ein Gärtner schlägt in 16m Entfernung voneinander zwei Pflöcke in die Erde und befestigt an Ihnen die Enden eines 20m langen Seiles, um damit ein elliptisches Beet anzulegen.

- a) Wie groß sind die beiden Halbachsen dieser Ellipse?

Ist die Fadenlänge  $l$  und der Brennpunktabstand  $2e$  gegeben, so bestimmt man die Länge der großen Halbachse  $a$  nach

$$a = 0,5 \cdot l = 10\text{m}$$

Die Länge der kleinen Halbachse  $b$  errechnet sich aus



$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = 6\text{m}$$

- b) Geben Sie die zugehörige Ellipsengleichung an.

$$36x^2 + 100y^2 - 3600 = 0$$

- c) In den elliptischen Umriss soll genau passend ein rechteckiges Beet eingefügt werden, dessen schmälere Seite genau 4m breit ist. „Genau passend“ meint, dass die Ecken des rechteckigen Beetes auf der Ellipsenlinie liegen sollen. Das rechteckige Beet soll außerdem den größtmöglichen Flächeninhalt haben. Wie lang ist dieses rechteckige Beet? Welchen Flächeninhalt hat es?

Länge: 18.856m

Flächeninhalt: 75.42m<sup>2</sup>

- d) Ermitteln Sie – ggf. durch sinnvolles und strukturiertes Probieren – welchen größtmöglichen Flächeninhalt ein in die gegebene Ellipse eingepasstes Rechteck hat. Geben Sie die Länge, die Breite und den Flächeninhalt dieses maximalen Rechtecks an.

Bei  $y = 4.24$  erhalten wir ein Rechteck, das 8.48 breit und 14.15 lang ist. Der zugehörige Flächeninhalt beträgt 120. Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, die in Aufgabe c) durchgeführten Schritte mehrmals mit unterschiedlichen Startwerten für  $y$  durchzuspielen.

- e) Das elliptische Beet soll nun seinerseits durch eine Raute eingefasst werden, deren Seiten die Ellipse genau tangieren. Zwei Eckpunkte der Raute sollen auf der verlängerten kleinen Achse, die beiden anderen Eckpunkte auf der verlängerten großen Achse liegen. Die Eckpunkte auf der verlängerten großen Achse sollen außerdem im Abstand von 5 m von den Ellipsenscheiteln liegen. Welche Seitenlänge hat die Raute? Beschreiben Sie Ihr Vorgehen!

Tangentenkonstruktion an eine Ellipse mit Hilfe des Leitkreises:

Leitkreis: Kreis um  $F_1$  mit dem Radius „Seillänge“, hier gleich 20.

Kreis um gegebenen Tangentenpunkt  $T$ , hier  $[15, 0]$  mit dem Radius  $F_2T$ , hier gleich 7.

Schnittpunkte beider Kreise bestimmen:  $K_1$  und  $K_2$

$[11.130, -5.833]$ ,  $[11.130, 5.833]$

Mittelsenkrechte von  $F_2K_1$  und  $F_2K_2$  sind die gesuchten Tangenten. Die Achsenabschnitte der beiden Geradengleichungen liefern die Schnittpunkte der Tangenten mit der  $y$ -Achse und damit die Ecken der Raute, die auf der  $y$ -Achse liegen.

$[0.537, -8.050]$  bzw.  $[-0.537, 8.05]$

Man benötigt einen Schnittpunkt  $S$  einer Tangenten mit der  $y$ -Achse, die Entfernung  $TS$  ist die gesuchte Seitenlänge der Raute.

Seitenlänge = 17.023 m