

### kg\_aufgaben\_15.docx

1. Der Zeichenarm eines Ellipsographen sei 1 m lang. An seinem Ende  $E$  ist der Zeichenstift fest angebracht, die Gelenkaugen  $A$  und  $B$  für die Nutensteine können auf dem Zeichenarm beliebig angebracht werden. Bei der Diskussion der folgenden Fragen lassen wir in grober Näherung zunächst außer acht, dass die Gelenkaugen  $A$  und  $B$  für die Nutensteine einen gewissen Platzbedarf haben.

a) Welches ist der größte Kegelschnitt, den Sie mit diesem Ellipsenzirkel zeichnen können?

Ein Kreis mit Radius  $r = 1$  m. Dazu verwendet man nur den Nutenstein  $A$  am anderen Ende des Zeichenarms und hält den Nutenstein im Kreuzungspunkt fest.

b) Welche Größen können die Ellipsen haben, die mit diesem Gerät gezeichnet werden können?

Die große Halbachse kann maximal 1 m lang sein. Dazu muss der Nutenstein  $A$  am gegenüberliegenden Ende zu  $E$  des Zeichenarms befestigt sein. Bringt man den Nutenstein  $B$  in direkter Nachbarschaft bei  $A$  an, so beträgt die kleine Halbachse  $B$  fast 1 m (abzüglich des Platzbedarfs für den Nutenstein). Je weiter man  $B$  in Richtung Zeichenstift  $E$  schiebt, desto kleiner wird die kleine Halbachse  $B$ . Im anderen Extrem wird die kleine Halbachse fast zu Null, wenn man  $B$  direkt an  $E$  heranschiebt.

Durch Veränderung von  $A$  kann die Länge der kleinen Halbachse  $a$  fast beliebig (Platzbedarf!) verkleinert werden. Die Länge der kleinen Halbachse  $b$  muss dabei immer kleiner als  $a$  sein.

c) Wie müssen Sie die Gelenkaugen  $A$  und  $B$  auf dem Zeichenarm einstellen, um eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = 74$  cm und  $b = 38$  cm zu zeichnen?

$A$  muss in 74 cm Entfernung von  $E$  und  $B$  in 38 cm Entfernung von  $E$  angebracht werden.

2. Zeichnen Sie eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = 9$  cm und  $b = 6$  cm mit Hilfe von Scheitelschmiegekreisen von Hand. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

Die Mittelpunkte der kleinen Scheitelschmiegekreise für die Hauptscheitel liegen auf der  $x$ -Achse, diejenigen für die Kreise der Nebenscheitel auf der  $y$ -Achse.

Der Radius  $r_2$  für den großen Scheitelschmiegekreis des Nebenscheitels errechnet sich nach

$$r_2 = \frac{a^2}{b}, \text{ der Radius } r_1 \text{ für den kleinen Scheitelschmiegekreis des Hauptscheitels beträgt } r_1 = \frac{b^2}{a}.$$

Es ergeben sich die folgenden Werte:  $r_2 = 13,5$  cm und  $r_1 = 4$  cm.

Man markiert im Koordinatensystem die Hauptscheitel bei  $x = 9$  und  $-9$  und die Nebenscheitel bei  $y = 6$  und  $-6$ .

Von den Hauptscheiteln geht man auf der  $x$ -Achse um  $r_1$  nach links und rechts auf  $x = 5$  und  $-5$ , von den Nebenscheiteln geht man auf der  $y$ -Achse um  $r_2$  nach oben und unten auf  $y = 13,5$  und  $-13,5$ . Damit hat man die Mittelpunkte der Schmiegekreise markiert und kann diese einzeichnen. Die Abschnitte zwischen den Kreisen ergänzt man frei Hand.

3. Eine Gerade ist in der Ebene durch zwei Punkte eindeutig festgelegt. Wir wollen im Folgenden diskutieren, wie aus der Kenntnis der Koordinaten zweier Punkte die Geradengleichung auf rein algebraischem Weg (also nicht durch Anwendung der Zwei-Punkte-Form!) ermittelt werden kann.

a) Wie lautet die allgemeine Geradengleichung in der Standardform?

$$y = mx + b$$

b) Wodurch wird aus dieser allgemeinen Form die Gleichung einer ganz konkreten Geraden? Was ist/sind somit die Unbekannte(n) in der Geradengleichung?

Steigung und Achsenabschnitt

- c) Wie gehen Sie algebraisch vor, um die Unbekannte(n) zu ermitteln?

System aus zwei Gleichungen  $y_1 = mx_1 + b$  und  $y_2 = mx_2 + b$  lösen.

4. Um einen Kreis in der Ebene eindeutig festzulegen, sind 3 Punkte nötig.

- a) Rekapitulieren Sie nochmals, wie es geometrisch möglich ist, aus drei gegebenen Punkten  $A:[6, -2]$ ,  $B:[14, 3]$  und  $C:[8, 13]$ , den zugehörigen Kreis zu ermitteln. Welches Ergebnis erhalten Sie?

Schnittpunkte der Mittelsenkrechten,  $M:[6.864, 5.518]$ ,  $r = 7.568$

- b) Stellen Sie die Gleichung für diesen Kreis auf und bringen Sie diese Gleichung in die implizite Form. Begründen Sie damit algebraisch, warum drei Punkte zur Festlegung eines Kreises nötig sind!

allg. Kreisgleichung:  $x^2 + Px + y^2 + Qy + C = 0$

Eine allg. Kreisgleichung hat damit drei Unbekannte  $P$ ,  $Q$  und  $C$ , folglich müssen für die Lösung auch drei konkrete Gleichungen vorliegen!

- c) Bestimmen Sie schließlich aus den drei genannten Punkten die Kreisgleichung algebraisch!

Man stellt drei Gleichungen auf:

$$6^2 + P \cdot 6 + (-2)^2 + Q \cdot (-2) + C = 0$$

$$14^2 + P \cdot 14 + 3^2 + Q \cdot 3 + C = 0$$

$$8^2 + P \cdot 8 + 13^2 + Q \cdot 13 + C = 0$$

und übergibt diese Maxima zur Ermittlung von  $P$ ,  $Q$  und  $C$ :

$$P = -\frac{151}{11} \approx -13,7272; \quad Q = -\frac{607}{55} \approx -11,03636; \quad C = \frac{1116}{55} \approx 20,290909$$

5. Diskutieren Sie, wie viele Punkte zur Festlegung einer Ellipse bzw. Hyperbel notwendig sind.

- a) Finden Sie eine algebraische Möglichkeit, um aus den Koordinaten dieser Punkte die zugehörige Gleichung zu finden.

Die allgemeine Kegelschnittgleichung kann durch Division durch den Koeffizienten von  $x^2$  in die Form  $x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  gebracht werden. Sie hat damit genau 5 Unbekannte. Man benötigt daher 5 Punkte, mit deren Koordinaten 5 Gleichungen aufgestellt werden können.

- b) Erstellen Sie eine Maxima-Funktion, welche genau dies ausführt und überprüfen Sie deren korrekte Arbeitsweise durch Plotten der ermittelten Kegelschnittgleichung.

```
ks_gleichung5(P,Q,R,S,T):=block(
  [g11,g12,g13,g14,g15,B,C,D,E,F,loesung,b,c,d,e,f,x,y],
  g11:P[1]^2+B*P[1]*P[2]+C*P[2]^2+D*P[1]+E*P[2]+F=0,
  g12:Q[1]^2+B*Q[1]*Q[2]+C*Q[2]^2+D*Q[1]+E*Q[2]+F=0,
  g13:R[1]^2+B*R[1]*R[2]+C*R[2]^2+D*R[1]+E*R[2]+F=0,
  g14:S[1]^2+B*S[1]*S[2]+C*S[2]^2+D*S[1]+E*S[2]+F=0,
  g15:T[1]^2+B*T[1]*T[2]+C*T[2]^2+D*T[1]+E*T[2]+F=0,
  loesung:solve([g11,g12,g13,g14,g15],[B,C,D,E,F])[1],
  loesung:matrixmap(rhs,loesung),
  b:loesung[1],
  c:loesung[2],
  d:loesung[3],
  e:loesung[4],
```

f:loesung[5],  
 $x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$ );

c) Wie viele Punkte benötigen Sie zur Festlegung einer Parabel?

Bei einer Parabel sind entsprechend der allgemeinen Parabelgleichung  $y = ax^2 + bx + c$  nur drei Punkte nötig.

6. Bestimmen Sie die Gleichung des Kegelschnitts, der durch die jeweils angegebenen Punkte verläuft:

a) P:[-4, -4], Q:[4, -3], R:[8, 2], S:[5, 5], T:[0, 2]

$$128y^2 - 163xy + 444y + 105x^2 - 514x - 1400 = 0$$

b) P:[0, -4], Q:[5, -6], R:[9, 0], S:[7, 4], T:[-6, -5]

$$123y^2 - 199xy + 1365y + 188x^2 - 2080x + 3492 = 0$$

c) Ermitteln Sie den Drehwinkel, den Verschiebevektor und die Halbachsen des jeweiligen Kegelschnitts.

a) Drehwinkel:  $41^\circ$ , Verschiebungsvektor  $[-1.42, 1.69]$ ,  $[a, b]: [7.72, 3.20]$ , Ellipse

b) Drehwinkel:  $50,33^\circ$ , Verschiebungsvektor  $[-2.38, 6.03]$ ,  $[a, b]: [3.16, 2.47]$ , Hyperbel

7. Von einer Ellipse kennt man die Koordinaten der beiden Brennpunkte sowie eines Peripheriepunkts. Bestimmen Sie daraus die zugehörige Ellipsengleichung, die Längen der beiden Halbachsen und den Flächeninhalt.

a)  $F_1: [-3, 2]$ ;  $F_2: [4, 4]$ ;  $P: [-2, 5]$ ;

$$81.471y^2 - 28.0xy - 474.825y + 36.471x^2 + 47.529x + 6.529 = 0.0$$

Drehwinkel:  $15,95^\circ$ , Verschiebevektor:  $[-1.30, -2.75]$

Halbachsen:  $[4.623, 2.849]$

Flächeninhalt  $a \cdot b \cdot \pi = 41.38$

b)  $F_1: [-1, 5]$ ;  $F_2: [4, -1]$ ;  $P: [2, 5]$ ;

$$50.947y^2 + 60.0xy - 293.789y + 61.947x^2 - 305.842x - 40.842 = 0.0$$

Drehwinkel:  $39,81^\circ$ , Verschiebevektor:  $[-2.43, -0.58]$

Halbachsen:  $[2.547, 4.662]$

Flächeninhalt:  $37,30$

8. In Abschnitt 15.3.2 wurde dargestellt, wie aus den Angaben der beiden Brennpunkte und eines Peripheriepunkts die Gleichung der zugehörigen Ellipse bestimmt werden kann.

a) Leiten Sie nun entsprechend her, wie aus der Kenntnis zweier Brennpunkte und eines Peripheriepunkts die Gleichung der zugehörigen Hyperbel ermittelt werden kann.

Im Gegensatz zur Ellipse mit ihrer konstanten Abstandssumme jedes Peripheriepunkts von den beiden Brennpunkten handelt es sich bei der Hyperbel um eine konstante Differenz. Konkret gilt bei der Hyperbel:

$$F_1P - PF_2 = f_1 - f_2 = 2a$$

Damit kann die Länge der großen Halbachse über die Beziehung  $a = \left| \frac{f_1 - f_2}{2} \right|$  bestimmt werden.

Die lineare Exzentrizität  $e$  bestimmt sich wie bei der Hyperbel aus  $e = \frac{\sqrt{F_1F_2}}{2}$ .

Außerdem gilt bei der Hyperbel  $e^2 = a^2 + b^2$ , so dass sich  $b$  nach  $b = \sqrt{e^2 - a^2}$  berechnen lässt.

Mit  $a$  und  $b$  kann die Hyperbelgleichung aufgestellt werden:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ .

Alles Weitere wie bei der Ellipse:

Der Drehwinkel wird aus der Steigung der Geraden durch  $F_1$  und  $F_2$  ermittelt und der Verschiebungsvektor zeigt vom Ursprung zum Mittelpunkt zwischen  $F_1$  und  $F_2$ .

Die gefundene Hyperbelgleichung wird schließlich noch diesen Transformationen (Drehung, Verschiebung) unterworfen.

- b) Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel mit den Brennpunkten  $F_1: [-3, 2]$ ,  $F_2: [4, 4]$  und dem Peripheriepunkt  $P: [-2, 5]$ ? Welche Längen haben ihre Halbachsen?

$$-4.529y^2 + 28.0xy + 13.175y + 40.471x^2 - 124.471x - 83.471 = 0.0$$

Drehwinkel und Vektor wie oben bei 7a)

Halbachsen:  $[1.460, 3.334]$

9. Gegeben ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $[7, 3]$  in Hauptachsenlage.

- a) Wo kann sich der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius 5 befinden, damit seine Kreislinie die Ellipse in genau einem Punkt berührt? Nennen Sie konkret vier offensichtliche Möglichkeiten und geben Sie eine der möglichen Kreisgleichungen an.

Die Ellipse hat ihre Hauptscheitel in  $[-7, 0]$ ,  $[7, 0]$  und ihre Nebenscheitel in  $[0, 3]$  und  $[0, -3]$ .

Daher gibt es einfache Möglichkeiten für die Lage des Kreismittelpunkts in den Punkten  $[-12, 0]$ ,  $[12, 0]$ ,  $[0, 8]$  und  $[0, -8]$ . Die Kreisgleichungen ergeben sich daraus recht einfach...

- b) Die Ellipse wird um den Vektor  $[2, 3]$  verschoben. Geben Sie wieder vier Möglichkeiten für die Lage des Kreismittelpunkts an, so dass sich Ellipse und Kreis in einem Punkt berühren. Nennen Sie eine mögliche Kreisgleichung.

Die Ellipse hat ihre Hauptscheitel in  $[-5, 3]$ ,  $[9, 3]$  und ihre Nebenscheitel in  $[2, 6]$  und  $[2, 0]$ .

Mögliche Kreismittelpunkte sind daher  $[-10, 3]$ ,  $[14, 3]$  sowie  $[2, 11]$  und  $[2, -5]$ .

- c) Die Ellipse wird aus ihrer Hauptachsenlage um  $30^\circ$  gedreht. Geben Sie vier Kreisgleichungen an, die zu einem Berühren zwischen Kreis und Ellipse führen und außerdem die jeweiligen Mittelpunkte.

Hierfür ist es am einfachsten, die in a) ermittelten Kreise ebenfalls einer Drehung um  $30^\circ$  zu unterziehen. Dies macht man am einfachsten durch Substitution der Transferterme in der jeweiligen Kreisgleichung. Ergebnisse im Uhrzeigersinn:

$$x^2 - 4\sqrt{27}x + y^2 - 12y + 119 = 0 \quad \left[2\sqrt{27}, 6\right] \quad [10,392, 6]$$

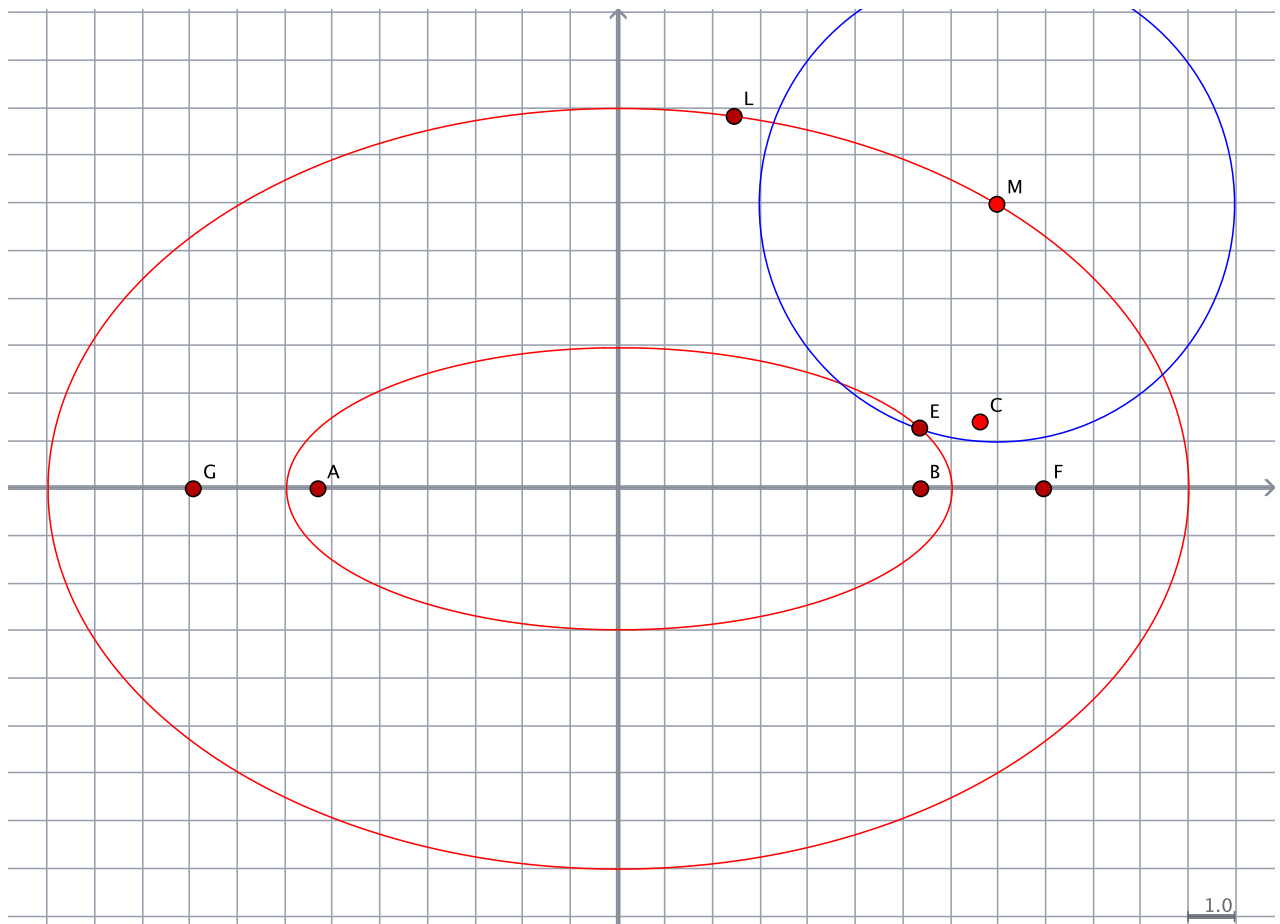
$$x^2 + 8x + y^2 - 8\sqrt{3}y + 39 = 0 \quad \left[-4, 4\sqrt{3}\right] \quad [-4, 6,928]$$

$$x^2 + 4\sqrt{27}x + y^2 + 12y + 119 = 0 \quad \left[-2\sqrt{27}, -6\right] \quad [-10,392, -6]$$

$$x^2 - 8x + y^2 + 8\sqrt{3}y + 39 = 0 \quad \left[4, -4\sqrt{3}\right] \quad [4, -6,928]$$

- d) Zurück zur ersten Teilaufgabe. Aufgrund der dort gefundenen vier offensichtlichen Möglichkeiten für die Lage des Kreismittelpunkts liegt die Idee nahe, dass alle möglichen Orte für die gesuchten Kreismittelpunkte eine Ellipse mit den Halbachsen 12 und 8 bilden. Was meinen Sie dazu? Begründen Sie Ihre Meinung!

Offene Diskussion mit Begründungen führen! Ggf. Nachweis in Cinderella



- e) Wie können Sie Ihre Meinung überprüfen? Als Hilfestellung seien nachfolgend die Geradengleichungen einer Tangente durch einen Ellipsen- bzw. Hyperbelpunkt  $[x_0, y_0]$  an eben diese Ellipse bzw. Hyperbel gegeben:

	implizit:	explizit:
Ellipsentangente:	$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} - 1 = 0$	$y = -\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \cdot x + \frac{b^2}{y_0}$
Hyperbeltangente:	$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} - 1 = 0$	$y = \frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \cdot x - \frac{b^2}{y_0}$

Wenn ein Kreis um eine Ellipse rollt, dann hat der Kreismittelpunkt immer den Abstand  $r$  (Kreisradius) von der Ellipse. Dort, wo sich Kreis und Ellipse berühren, haben beide eine gemeinsame Tangente. Der Kreismittelpunkt liegt auf der Senkrechten zur Kreistangente im Abstand  $r$  vom Berührungspunkt. Zu ermitteln ist also die Tangente durch den Berührungspunkt an die Ellipse. Diese Tangente kann durch die obige Formel ermittelt werden.

Vorgehensweise: Man ermittelt einen Ellipsenpunkt der Ellipse  $[7, 3]$ , beispielsweise durch den Schnitt einer Ursprungsgeraden mit der Ellipse. Genau zu diesem Punkt ermittelt man die Ellipsentangente und außerdem die Senkrechte zu der Ellipsentangente. Dann schneidet man die Senkrechte mit der Ellipse  $[12, 8]$  und überprüft, ob der Abstand zwischen Berühr- und Schnittpunkt genau dem Radius 5 entspricht.

- f) Falls die Bahn keine Ellipse mit den Halbachsen  $[a, b]: [12, 8]$  bildet, beschreibt die Bahn des Kreismittelpunkts vielleicht eine andere Ellipse?

Nein. Man errechnet zu den 4 „Scheitel“punkten noch einen 5. Punkt, auf dem der Kreismittelpunkt abrollt und bestimmt aus diesen 5 Punkten die zugrundeliegende Kegelschnittgleichung.

Man erhält hierfür zwar eine Ellipsengleichung, aber eine mit einem gemischten Glied und damit eine solche, die um einen bestimmten Winkel verdreht wurde. Damit kann die Rollbahn des Kreises keine Ellipsenbahn sein.

10. Finden Sie Orte für Mittelpunkte des oben angegebenen Kreises mit  $r = 5$ , so dass seine Kreislinie mit der ebenfalls oben angegebenen Ellipse in Hauptachsenlage genau drei Punkte gemeinsam hat?

a) Wo befinden sich ganz offensichtlich solche Stellen? Geben Sie die entsprechenden Mittelpunkte an.

Drei gemeinsame Punkte ergeben sich, wenn der Kreis die Ellipse von innen an deren Scheiteln berührt. Dies sind die Punkte  $[-2, 0]$  und  $[2, 0]$  sowie  $[0, -2]$  und  $[0, 2]$ .

b) Welches sind mögliche Orte für Mittelpunkte eines Kreises mit dem Radius  $\frac{13}{2}$ , der mit der Ellipse genau drei Punkte gemeinsam hat?

$[-0.5, 0]$  und  $[0.5, 0]$ , sowie  $[0, 3.5]$  und  $[0, -3.5]$

c) Welches sind mögliche Orte für Mittelpunkte eines Kreises mit dem Radius 7, der mit der Ellipse genau drei Punkte gemeinsam hat?

$[0, -4]$  und  $[0, 4]$

11. Es ist eine Ellipse mit den Hauptachsen  $[a, b]: [9, 5]$  gegeben. In diese Ellipse soll ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt eingepasst werden, dessen Punkt  $C$  habe die Koordinate  $[0, 5]$ .

a) Skizzieren Sie die Situation. In welchen Quadranten liegen voraussichtlich die Punkte  $A$  und  $B$ ?

$A$  und  $B$  liegen unterhalb der Achse, also in den Quadranten 3 und 4.

b) Begründen Sie, warum das gesuchte Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt ein gleichschenkliges Dreieck sein muss.

Begründung wie beim Kreis: Zu einer beliebigen Grundseite in der Ellipse liefert eine Parallele zu dieser Grundseite als Tangente an die Ellipse die größtmögliche Höhe. Da aber  $C$  vorgegeben ist und im Nebenscheitel liegt, verläuft eine Tangente durch  $C$  immer parallel zur  $x$ -Achse.

c) Erstellen Sie eine Funktion, welche nach Vorgabe der  $x$ -Koordinate die zugehörige  $y$ -Koordinate eines Ellipsenpunktes im 3. oder 4. Quadranten liefert.

Ellipsengleichung aufstellen:

$$\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{5^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 + 81y^2 - 2025 = 0$$

Nach  $y^2$  auflösen:

$$y^2 = -\frac{25}{81}x^2 + 25$$

Da die gesuchten Punkte unterhalb der  $x$ -Achse liegen, folgt daraus für die Funktion:

$$y = -\sqrt{-\frac{25}{81}x^2 + 25}$$

d) Mit dieser Funktion können Sie verschiedene Punkte finden, welche auf der Ellipse im 3. oder 4. Quadranten liegen. Ermitteln Sie einige Punkte und berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt des Dreiecks. Versuchen Sie durch Probieren einen maximalen Flächeninhalt des Dreiecks zu erzielen!

Mit dem Wissen aus b) – dass nur ein gleichschenkliges Dreieck maximalen Flächeninhalt haben wird – kann man den Flächeninhalt dieses Dreiecks über die Formel: Höhe mal halbe Grundseite

berechnen. Die halbe Grundseite ist die  $x$ -Koordinate des Punktes  $B$  und die Höhe ist der Betrag der zugehörigen  $y$ -Koordinate plus die Länge der kleinen Halbachse.

Durch Probieren erhält man ein Maximum des Flächeninhalts etwa der Stelle  $x = 7,8$  mit 58,46.

e) Bestimmen Sie das Maximum des Flächeninhalts analytisch.

Man kann eine Funktion  $a(x)$  aufstellen, welche den gesuchten Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von der  $x$ -Koordinate des gewählten Punkts berechnet:

$$a(x) = x \cdot \left( \sqrt{-\frac{25}{81} \cdot x^2 + 25} + 5 \right)$$

Gesucht ist das Maximum der angegebenen Funktion  $a(x)$ . Hierzu bildet man deren Ableitung und setzt diese gleich Null. Die Ableitung liefert Maxima:

`diff(a(x), x, 1);`

$$\sqrt{25 - \frac{25 x^2}{81}} - \frac{25 x^2}{81 \sqrt{25 - \frac{25 x^2}{81}}} + 5$$

Setzt man diesen Term gleich Null und löst die Gleichung mit `to_poly_solve()`, so erhält man die symmetrischen Lösungen  $\pm 7.794$ .

12. Vergleichen Sie Ihre jetzige Lösung mit derjenigen aus der in Kapitel 8 gestellten Aufgabe 14 zur Flächenmaximierung eines Dreiecks in einem Kreis. Zeichnen Sie beide Lösungen (Kreis bzw. Ellipse mit flächenmaximalem Dreieck) in ein und dasselbe Koordinatensystem. Was fällt Ihnen auf? Ist das ein Zufall oder allgemeingültig?

Zeichnet man beide Lösungen in ein Koordinatensystem, dann fällt auf, dass die Strecken AB aufeinander liegen. Dies ist kein Zufall: Die Ellipse kann man als in  $x$ -Richtung gedehnten Kreis auffassen!

Ein Kreis hat die Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$

Für eine Ellipse gilt:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Formt man diese Ellipsengleichung durch Multiplizieren mit  $b^2$  um, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + y^2 = b^2$$

Diese Gleichung ist – setzt man  $b^2 = r^2$  – ganz ähnlich zur Kreisgleichung. Beide Gleichungen unterscheiden sich noch durch den Koeffizienten  $b^2/a^2$  von  $x^2$ . Das ist aber nichts anderes als eine Koordinatentransformation in  $x$ -Richtung bzw. eine affine Abbildung. Ersetzt man in der Kreisgleichung  $x$  durch  $b/a \cdot x$ , dann erhält man die Ellipsengleichung. Eine Ellipse kann man sich also vorstellen als Kreis, der mit einem konstanten Faktor gedehnt wurde; der Flächeninhalt einer ebenen Figur wird dabei mit demselben Faktor skaliert. Demnach wird auch ein dem Kreis eingeschriebenes Dreieck mit maximalem Flächeninhalt so skaliert, dass ein Dreieck maximalen Flächeninhalts in der Ellipse entsteht.