

### kg\_aufgaben\_16.docx

1. Zeichnen Sie einen Würfel in verschiedenen Darstellungen der Kavalierperspektive:
  - a)  $f_1 = 0,5$ ;  $\alpha_1 = 45^\circ$
  - b)  $f_2 = 0,3$ ;  $\alpha_2 = 60^\circ$
  - c)  $f_3 = 0,7$ ;  $\alpha_3 = 30^\circ$
2. Zeichnen Sie ebenso ein Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grund- und Deckfläche in unterschiedlichen Darstellungen.
3. Zeichnen Sie schließlich noch ein Oktaeder und ein Tetraeder in der Kavalierperspektive.
4. Wahrscheinlich haben Sie den Würfel aus der obigen Aufgabe mit der Frontseite parallel zur Zeichenebene dargestellt. Drehen Sie deshalb nun den Würfel auf der Grundrissebene um seinen linken vorderen Eckpunkt um  $30^\circ$ , bevor Sie diesen gedrehten Würfel in der Kavalierperspektive zeichnen.
5. Schreiben Sie in Maxima eine Funktion `quadrat(x)`, welche das Quadrat des übergebenen Aufrufparameters zurückgibt.

```
quadrat(x) := x^2
```

- a) Bestimmen Sie mit dieser Funktion nun die Quadratzahlen der ersten 20 natürlichen Zahlen.

```
quadrat(1), quadrat(2), quadrat(3), ... quadrat(20)
```

- b) Zur Lösung des Aufgabenteils a) müssen Sie die Funktion `quadrat()` 20-mal mit unterschiedlichen Parametern aufrufen. Dies ist umständlich und zeitraubend. Besser wäre es doch, die Zahlen von 1 bis 20 in einer Liste zusammenzufassen und dann zu „sagen“, dass die Funktion `quadrat()` nacheinander auf alle Elemente dieser Liste angewendet werden soll. Dies leistet die Funktion `map()`. Informieren Sie sich über diese Funktion im Hilfesystem und versuchen Sie dann, die gestellte Aufgabe aus a) damit wesentlich effizienter zu lösen.

```
map(quadrat, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20])
```

6. Gegeben sind die folgenden Punkte mit ihren Raumkoordinaten:  
 $A:[8, 0, 5]$ ,  $B:[-3, 0, 8]$ ,  $C:[-9, 0, 0]$ ,  $D:[-5, 0, -9]$ ,  $E:[7, 0, -7]$ ,  $F:[6, 7, 2]$ ,  $G:[-1, 7, 6]$ ,  
 $H:[-6, 7, 1]$ ,  $I:[0, 7, -3]$ ,  $K:[1, 13, 1]$ ,  $L:[-1, 13, 3]$ ,  $M:[-3, 13, 2]$ .
  - a) Wie lauten deren zweidimensionale Bildkoordinaten in der Kavalierperspektive mit dem Verkürzungsfaktor 0,6 und dem Verzerrungswinkel  $30^\circ$ ?  
 $A:[10.6, 1.5]$ ,  $B:[1.16, 2.4]$ ,  $C:[-4.48, 0.3]$ ,  $D:[0.323, -2.7]$ ,  $E:[6.92, -1.2]$ ,  $F:[8.56, 7.9]$ ,  
 $G:[3.16, 9.4]$ ,  $H:[-4.04, 6.4]$ ,  $I:[3.48, 6.7]$ ,  $K:[5.04, 13.6]$ ,  $L:[1.56, 13.9]$ ,  $M:[-2.56, 12.1]$
  - b) Die Punkte werden in der folgenden Reihenfolge zu einem Streckenzug verbunden:  
 $[A, F, G, B, A, E, I, K, F, I, H, M, K, L, M, L, G, H, C, B, C, D, E, I, D]$   
Stellen Sie den Körper in der Kavalierperspektive dar.
  - c) Für die Darstellung in der Militärperspektive werden die Punkte zunächst um  $90^\circ$  um die  $x$ -Achse nach vorne gekippt. Wie lauten dann deren Raumkoordinaten?  
 $A:[8, 5, 0]$ ,  $B:[-3, 8, 0]$ ,  $C:[-9, 0, 0]$ ,  $D:[-5, -9, 0]$ ,  $E:[7, -7, 0]$ ,  $F:[6, 2, -7]$ ,  $G:[-1, 6, -7]$ ,  
 $H:[-6, 1, -7]$ ,  $I:[0, -3, -7]$ ,  $K:[1, 1, -13]$ ,  $L:[-1, 3, -13]$ ,  $M:[-3, 2, -13]$
  - d) Anschließend werden die gekippten Punkte um  $10^\circ$  um die  $z$ -Achse gedreht. Wie lauten dann diese Koordinaten?

$A:[7.01, 6.31, 0]$ ,  $B:[-4.34, 7.36, 0]$ ,  $C:[-8.86, -1.56, 0]$ ,  $D:[-3.36, -9.73, 0]$ ,  $E:[8.11, -5.68, 0]$ ,  
 $F:[5.56, 3.01, -7]$ ,  $G:[-2.03, 5.74, -7]$ ,  $H:[-6.08, -0.0571, -7]$ ,  $I:[0.521, -2.95, -7]$ ,  
 $K:[0.811, 1.16, -13]$ ,  $L:[-1.51, 2.78, -13]$ ,  $M:[-3.3, 1.45, -13]$

- e) Abschließend errechnen Sie deren zweidimensionale Koordinaten einer Militärperspektive und lassen den Körper entsprechend darstellen.

$A:[7.01, 6.31]$ ,  $B:[-4.34, 7.36]$ ,  $C:[-8.86, -1.56]$ ,  $D:[-3.36, -9.73]$ ,  $E:[8.11, -5.68]$ ,  $F:[5.56, 10.0]$ ,  
 $G:[-2.03, 12.7]$ ,  $H:[-6.08, 6.94]$ ,  $I:[0.521, 4.05]$ ,  $K:[0.811, 14.2]$ ,  $L:[-1.51, 15.8]$ ,  $M:[-3.3, 14.4]$

7. Gegeben ist ein Tetraeder mit der Kantenlänge 3.

- a) Bestimmen Sie die Raumkoordinaten dieses Tetraeders, dessen Fläche  $ABC$  in der Grundrissebene liegt und dessen Punkt  $A$  im Koordinatenursprung und dessen Punkt  $B$  auf der  $x$ -Achse liegt. Der Punkt  $C$  liegt „hinter“ der Zeichenebene (positive  $z$ -Koordinate). Die Pyramidenspitze  $D$  liege in positiver  $y$ -Richtung.

```
(%i1) A:[0,0];
(%o1) [0,0]
(%i2) B:[3,0];
(%o2) [3,0]
(%i5) [P1,P2]:kreisschnitt([A,3],[B,3]);
(%o5) [[3/2,-(3*sqrt(3))/2],[3/2,(3*sqrt(3))/2]]
(%i6) C:P2;
(%o6) [3/2,(3*sqrt(3))/2]
```

Bestimmung der  $x$ - $z$ -Koordinaten von  $D$ :

```
(%i25) [M,r]:umkreis(A,B,C);
(%o25) [[3/2,3/(2*sqrt(3))],sqrt(3)]
```

Die Körperhöhe ergibt die  $y$ -Koordinate von  $D$ ;

Bestimmung über den Pythagoras:

```
(%i7) h:sqrt(3^2-r^2);
(%o7) sqrt(6)
(%i8) float(%), numer;
(%o8) 2.449489742783178
```

Raum-Koordinaten von  $D$ :

```
(%i9) D:[M[1],h,M[2]];
(%o9) [3/2,sqrt(6),3/(2*sqrt(3))]
```

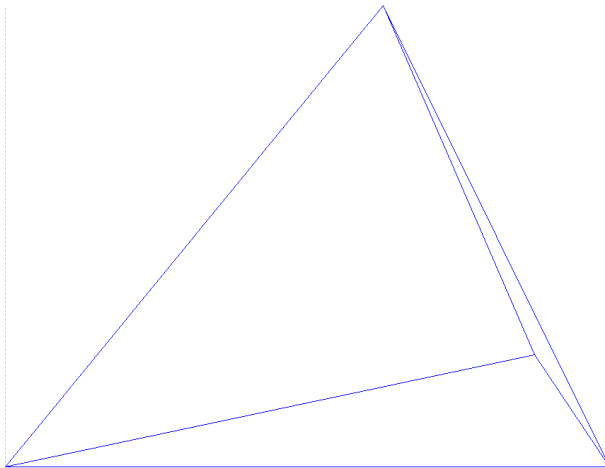
Raumkoordinaten der anderen Punkte:

```
(%i29) A:[A[1],0,A[2]];
(%o29) [0,0,0]
(%i30) B:[B[1],0,B[2]];
(%o30) [3,0,0]
(%i31) C:[C[1],0,C[2]];
(%o31) [3/2,0,(3*sqrt(3))/2]
```

- b) Stellen Sie diesen Tetraeder in Kavalierperspektive ( $f=0.5$ ;  $\varphi=30^\circ$ ) dar.

```
(%i32) faktor:0.5;
(%o32) 0.5
(%i33) s_winkel:30;
(%o33) 30
```

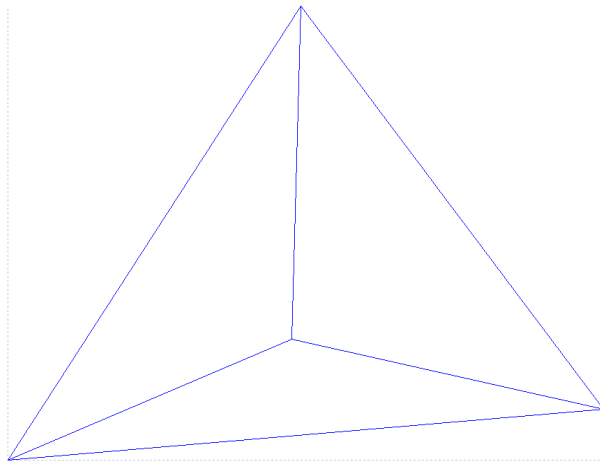
```
(%i15) k_liste:map(kavalier,[A,B,C,A,D,C,B,D]);
(%o15) [0,0],[3,0],[2.625,0.375*sqrt(3)],[0,0],
[1.875,sqrt(6)+0.375/sqrt(3)],[2.625,0.375*sqrt(3)],[3,0],
[1.875,sqrt(6)+0.375/sqrt(3)]]
(%i37) zeichne_2d(k_liste);
(%o37)
```



c) Drehen Sie den Tetraeder um die  $y$ -Achse um  $25^\circ$  und stellen Sie den gedrehten Körper im Schrägbild (wie oben) dar.

```
(%i38) dw:25;
(%o38) 25
(%i18) d_liste:map(drehen,[A,B,C,A,D,C,B,D]);
(%o18) [[0.0,0,0.0],[2.71892336110995,0,1.267854785222098],
[0.26146722824297,0,2.988584094275237],[0.0,0,0.0],
[0.99346352978431,sqrt(6),1.418812959832445],
[0.26146722824297,0,2.988584094275237],
[2.71892336110995,0,1.267854785222098],
[0.99346352978431,sqrt(6),1.418812959832445]]

(%i42) k_liste:map(kavalier,d_liste);
(%o42)
(%i19) k_liste:map(kavalier,d_liste);
(%o19) [[0.0,0.0],
[0.31696369630552*sqrt(3)+2.71892336110995,0.31696369630552],
[0.74714602356881*sqrt(3)+0.26146722824297,0.74714602356881],
[0.0,0.0],[0.35470323995811*sqrt(3)+0.99346352978431,sqrt(6)+0.35470323995811],
[0.74714602356881*sqrt(3)+0.26146722824297,0.74714602356881],
[0.31696369630552*sqrt(3)+2.71892336110995,0.31696369630552],
[0.35470323995811*sqrt(3)+0.99346352978431,sqrt(6)+0.35470323995811]]
(%i43) zeichne_2d(k_liste);
```



- d) Nun wird derselbe Tetraeder (Kantenlänge 3) mit seinem Grundflächenpunkt  $A$  auf die  $x$ - $z$ -Ebene auf die Koordinaten  $[1, -1]$  gestellt. Die Kante  $AB$  hat die Steigung 1 in der  $x$ - $z$ -Ebene und die Punkte  $B$  und  $C$  liegen im ersten Quadranten. Die Spitze des Tetraeders ist in die positive  $y$ -Richtung orientiert.

- e) Bestimmen Sie die Raumkoordinaten der Tetraederpunkte.

Festlegen von  $A$ :

```
(%i21) A:[1,-1];
```

```
(%o21) [1,-1]
```

Geradengleichung der Kante  $AB$ :

```
(%i22) gerade_ab:psf_std(A,1);
```

```
(%o22) [1,-2]
```

Punkte auf dieser geraden im Abstand 3 von  $A$ :

```
(%i23) [P1,P2]:schnitt_kg([A,3],gerade_ab);
```

```
(%o23) [[-(3*sqrt(2)-2)/2,-  
(3*sqrt(2)+2)/2],[ (3*sqrt(2)+2)/2,(3*sqrt(2)-2)/2]]
```

$B$  im ersten Quadranten:

```
(%i24) B:P2;
```

```
(%o24) [(3*sqrt(2)+2)/2,(3*sqrt(2)-2)/2]
```

```
(%i25) float(%),numer;
```

```
(%o25) [3.121320343559643,1.121320343559643]
```

Bestimmung von  $C$  im ersten Quadranten:

```
(%i26) [P1,P2]:kreisschnitt([A,3],[B,3]);
```

```
(%o27) [[0.22354286469244,1.897777478867205],  
[3.897777478867205,-1.776457135307562]]
```

```
(%i28) C:P1;
```

```
(%o29) [0.22354286469244,1.897777478867205]
```

Bestimmung von  $D$ :

```
(%i30) [M,r]:umkreis(A,B,C);
```

```
(%o31) [[1.448287736084027,0.67303260747562],1.732050807568878]
```

```
(%i32) h:sqrt(3^2-r^2);
```

```
(%o33) 2.449489742783178
```

Raumkoordinaten von  $D$ :

```
(%i34) D:[M[1],h,M[2]];
```

```
(%o35) [1.448287736084027, 2.449489742783178, 0.67303260747562]
```

Raumkoordinaten der anderen Punkte:

```
(%i36) A:[A[1], 0, A[2]];
```

```
(%o36) [1, 0, -1]
```

```
(%i37) B:[B[1], 0, B[2]];
```

```
(%o37) [(3*sqrt(2)+2)/2, 0, (3*sqrt(2)-2)/2]
```

```
(%i38) C:[C[1], 0, C[2]];
```

```
(%o38) [-(3*sqrt(6)-3*sqrt(2)-
```

```
4)/4, 0, (3*sqrt(2)*sqrt(3)+3*sqrt(2)-4)/4]
```

- f) Stellen Sie den Tetraeder in der Kavalierperspektive dar (Darstellungsparameter wie oben).

Darstellung in der Kavalierperspektive:

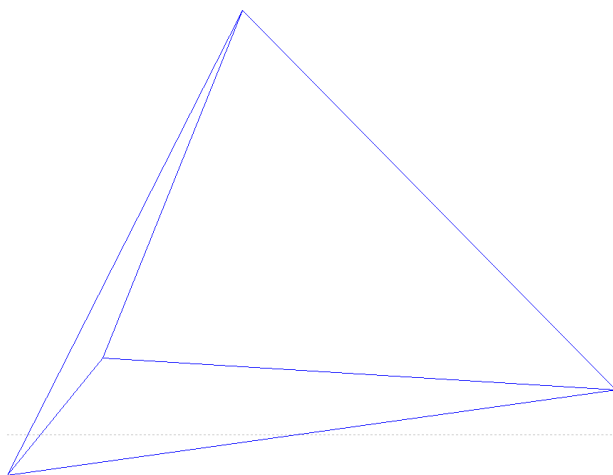
```
(%i39) t_liste:[A,B,C,A,D,B,C,D];
```

```
(%o39) ...
```

```
(%i40) p_liste:map(kavalier,t_liste);
```

```
(%o40) ...
```

```
(%i41) zeichne_2d(p_liste);
```



- g) Nun wird der Tetraeder wieder um  $25^\circ$  um die  $y$ -Achse in mathematisch positiver Orientierung gedreht. Stellen Sie den gedrehten Tetraeder ebenfalls im Schrägbild dar.

```
(%i42) d_liste:map(drehen,t_liste);
```

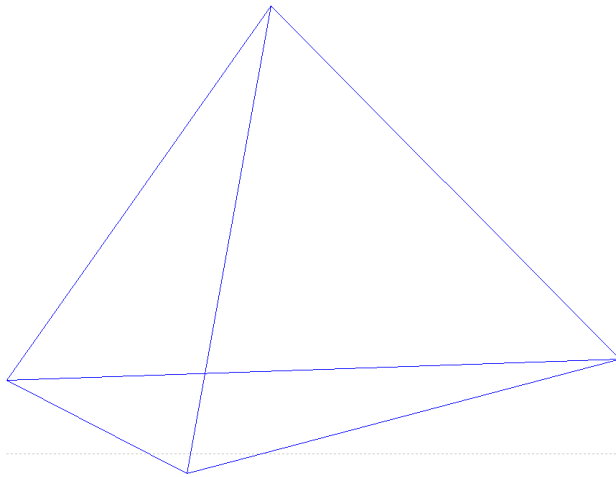
```
(%o42) ...
```

```
(%i43) p_liste:map(kavalier,d_liste);
```

```
(%o43) ...
```

```
(%i44) zeichne_2d(p_liste);
```

```
(%o44)
```



8. Gegeben ist ein Oktaeder mit der Kantenlänge 4. Vier Punkte  $A, B, C, D$  des Oktaeders liegen in der  $x$ - $z$ -Ebene mit der Kante  $AB$  auf der  $x$ -Achse und der Kante  $DA$  auf der  $z$ -Achse.  $E$  liegt in negativer,  $F$  in positiver  $y$ -Richtung.

a) Bestimmen Sie die Raumkoordinaten  $A, B, C, D, E, F$  des Oktaeders.

$A: [0, 0, 0]; B: [4, 0, 0]; C: [4, 0, 4]; D: [0, 0, 4]$

Koordinaten der „Spitzen“  $E$  und  $F$  in der  $x$ - $z$ -Ebene:

Schnittpunkt der Diagonalen / Diagonalenhälfte, damit:

$$E = F = [2, 2]$$

Bestimmung der Körperhöhe für die  $y$ -Koordinate:

Mittelflächendiagonale:  $4\sqrt{2}$ , davon die Hälfte  $2\sqrt{2} = \sqrt{8} = 2.828\dots$

Daraus folgt für die Raumkoordinaten von  $E$  und  $F$

$E: [2, -2.828, 2]$  und  $F: [2, 2.828, 2]$

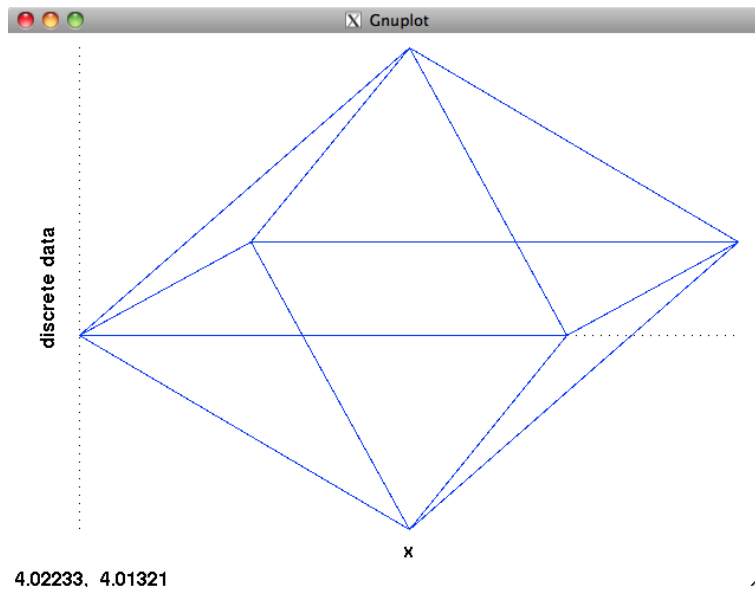
- b) Gegeben ist ein räumliches Koordinatensystem mit den Achsen  $x$  (Rechtsachse),  $y$  (Hochachse) und  $z$  (senkrecht auf der  $x$ - $y$ -Ebene). Ein beliebiger Punkt  $P$  mit den Raumkoordinaten  $[x, y, z]$  soll durch eine Kavalierperspektive in die  $x$ - $y$ -Ebene abgebildet werden; der Verzerrungsfaktor der Kavalierperspektive sei  $f$ , ihr Verzerrungswinkel sei  $\varphi$ . Geben Sie an, wie man die Koordinaten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  des Bildpunktes von  $P$  in der  $x$ - $y$ -Ebene in Abhängigkeit von dessen Raumkoordinaten sowie  $f$  und  $\varphi$  bestimmen kann.

$$\bar{x} = x + f \cdot z \cdot \cos \varphi$$

$$\bar{y} = y + f \cdot z \cdot \sin \varphi$$

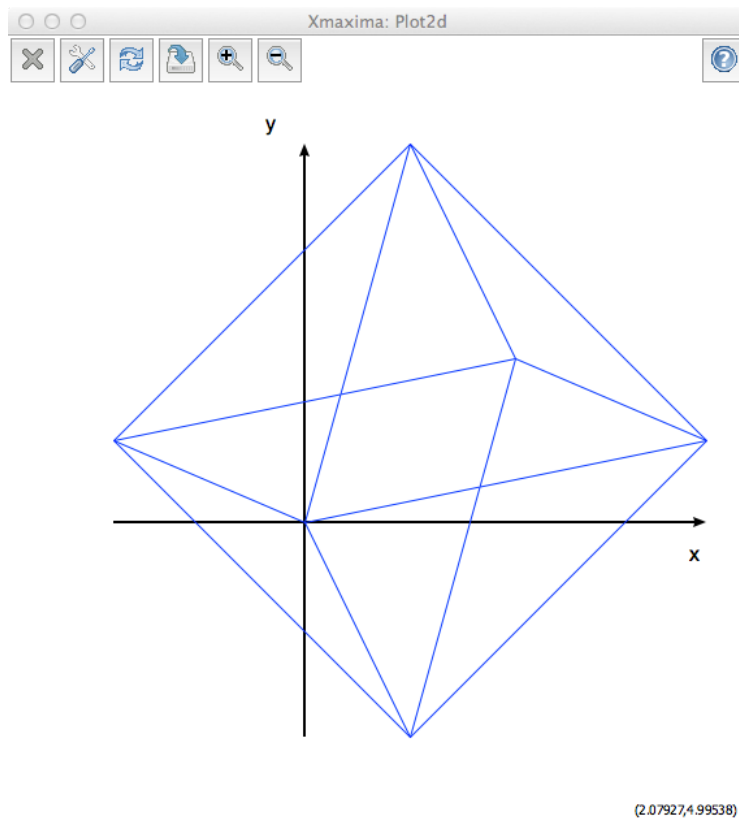
- c) Der Oktaeder wird durch eine Kavalierprojektion ( $0,5; 45^\circ$ ) in die  $x$ - $y$ -Ebene abgebildet. Bestimmen Sie die  $x$ - $y$ -Koordinaten dieses Bildes und zeichnen Sie das Bild in ein Koordinatensystem ein.

$[[0.0, 0.0], [4.0, 0.0],$   
 $[5.414213562373095, 1.414213562373095],$   
 $[1.414213562373095, 1.414213562373095],$   
 $[2.707106781186547, -2.121320343559643],$   
 $[2.707106781186547, 3.535533905932738]]$



- d) Drehen Sie den Oktaeder um  $45^\circ$  um die  $y$ -Achse und zeichnen Sie das Schrägbild dieses gedrehten Oktaeders. Bestimmen Sie die  $x$ - $y$ -Koordinaten des Bildes.

[[0.0, 0.0],  
 [3.828427124746191, 1.0],  
 [2.0, 2.0],  
 [-1.828427124746191, 1.0],  
 [1.0, -1.828427124746191],  
 [1.0, 3.828427124746191]]



- e) Der Oktaeder wird nun mit seiner Seitenfläche  $ABE$  genau so auf die  $x$ - $z$ -Ebene gelegt, dass die Kante  $AB$  auf der  $x$ -Achse verbleibt und  $E$  im ersten Quadranten zu liegen

kommt. Die Punkte  $C, D, F$  liegen dann parallel zur  $x$ - $z$ -Ebene in positiver  $y$ -Richtung.  
Bestimmen Sie die Raumkoordinaten der Eckpunkte des Oktaeders in dieser Lage.

Zunächst Bestimmung der Koordinaten in der  $x$ - $z$ -Ebene:

$A: [0, 0]; B: [4, 0]$

$E$  liegt ebenfalls in der  $x$ - $z$ -Ebene. Seine  $x$ - $z$ -Koordinaten erhält man als Schnittpunkt eines Kreises um  $A$  und  $B$  mit dem Radius 4.

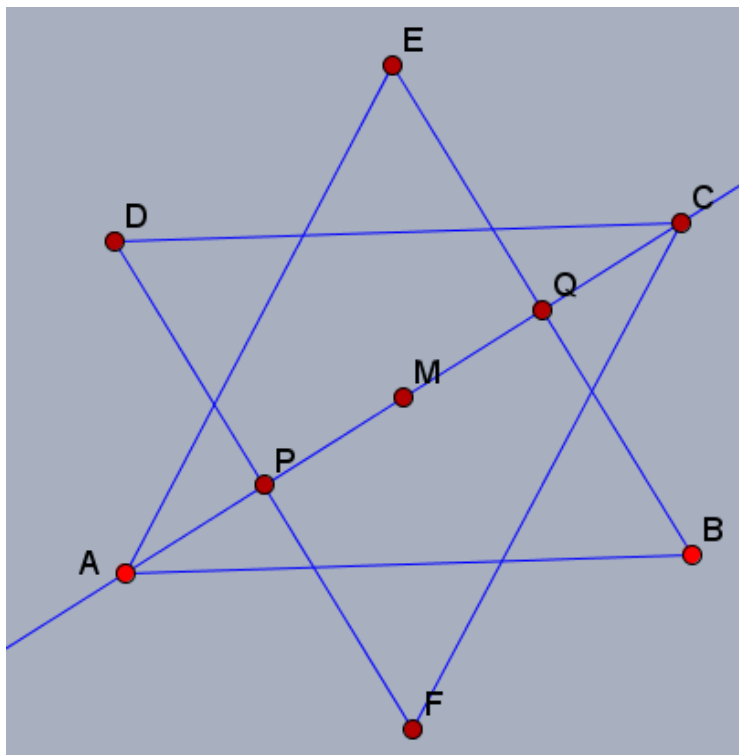
$E: [2, 2\sqrt{3}]$

Schaut man „von oben“ auf das Oktaeder in der angegebenen Lage, so erkennt man, dass das Oktaeder ein Antiprisma ist. Dies bedeutet, dass das Deckdreieck  $DFE$  genau um  $60^\circ$  gedreht ist, bzw. dieses Deckdreieck punktsymmetrisch zum Grundflächendreieck  $ABE$  ist. Die  $x$ - $z$ -Koordinaten von  $D, F, E$  lassen sich somit durch eine Punktspiegelung um den gemeinsamen Mittelpunkt  $M$  beider Dreiecke bestimmen.

Zunächst muss  $M$  bestimmt werden. Im gls. Dreieck ist dies der gemeinsame Schnittpunkt von Höhen, Mittelsenkrechten, Winkel- und Seitenhalbierenden und damit der Mittelpunkt des Umkreises.

$M: \left(2, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

Skizziert man das Oktaeder in der Draufsicht, so ergibt sich die folgende Lage der Punkte:



$C$  ist Spiegelpunkt von  $A$ :  $\left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

$D$  ist Spiegelpunkt von  $B$ :  $\left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

$F$  ist Spiegelpunkt von  $E$ :  $\left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}\right) = \left(2, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

Berechnung der  $y$ -Raum-Koordinate der Punkte  $C, D, F$ :



Alle Punkte liegen in derselben Ebene parallel zur  $x$ - $z$ -Ebene.

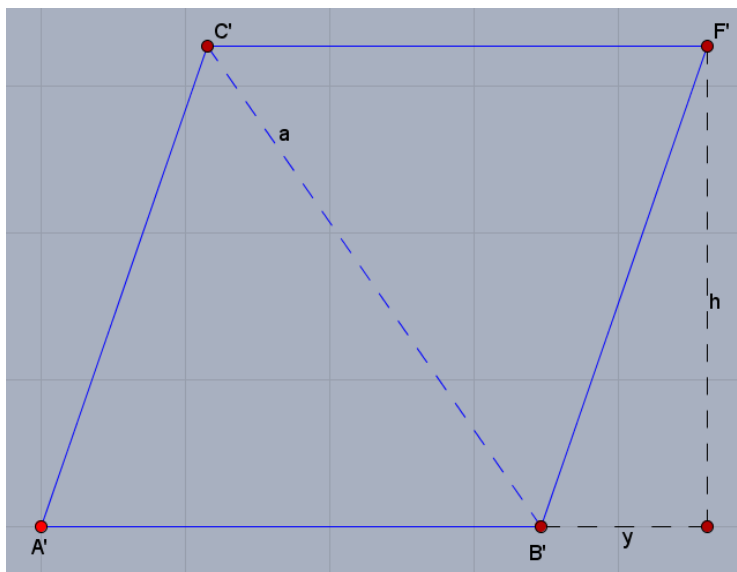
Für die Berechnung der Körperhöhe ist ein Zusammenhang hilfreich, der in der obigen Zeichnung deutlich wird:

$AQ$  ist die Höhe im Seitendreieck, ebenso  $PC$ . Man weiß, dass  $M$  (Seitenhalbierendenschnittpunkt!) diese Strecken im Verhältnis 2:1 teilt. Also gilt

$$\frac{AM}{MQ} = \frac{2}{1} \quad \text{Das selbe Verhältnis haben die Strecken } CM \text{ zu } MP. \text{ Da die entsprechenden Strecken}$$

außerdem auch noch gleich lang sind, halbiert  $M$  die Strecke  $PQ$ . Damit sind alle Teilstrecken  $AP$ ,  $PM$ ,  $MQ$ ,  $QC$  gleich lang und jeweils ein Drittel einer Dreieckshöhe. Damit kann die Körperhöhe in der hier dargestellten Lage nach Pythagoras berechnet werden.

Im Aufriss ist der Körper ein gleichseitiges Parallelogramm.



Die hier mit  $y$  bezeichnete Strecke ist – wie oben dargestellt – gleich einem Drittel der Kantenlänge des Parallelogramms, also

$$y = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

Die Strecke  $B'F'$  ist in der Realität gleich der Kantenlänge  $a$ , sie verläuft aber im Aufriss nicht parallel zur Zeichenfläche, wird dort also nicht in wahrer Größe dargestellt.

In der Projektion handelt es sich um die Höhe  $h$ :  $\frac{a}{2}\sqrt{3}$  des gleichseitigen Dreiecks.

Die Körperhöhe ist demnach allgemein:

$$h = \sqrt{B'F'^2 - y^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2}$$

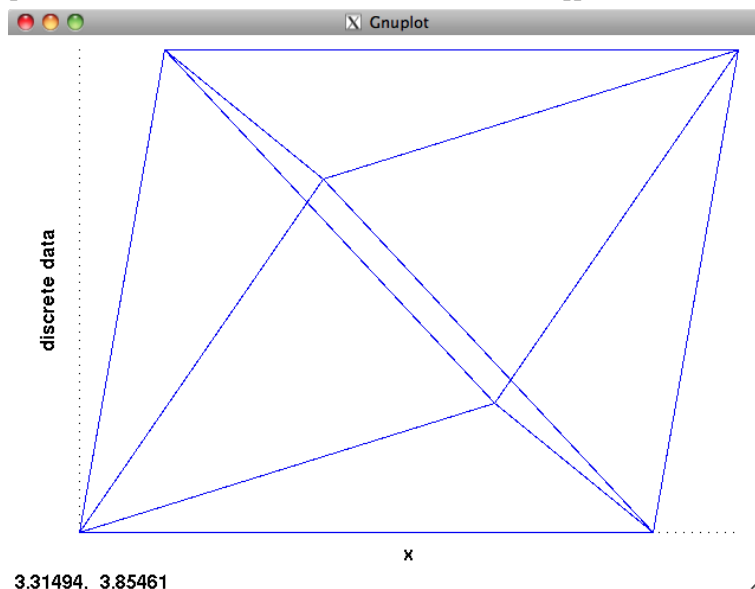
Damit errechnet sich  $h$ :

$$h = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$h = \frac{4}{3}\sqrt{6} = 3.265986323710905$$

- f) Bilden Sie den Oktaeder durch eine Kavalierprojektion  $(0,4; 50^\circ)$  in die  $x$ - $y$ -Ebene ab. Bestimmen Sie die  $x$ - $y$ -Koordinaten dieses Bildes und zeichnen Sie das Bild in ein Koordinatensystem ein.

```
[[0.0, 0.0], [4.0, 0.0],
[4.593781759174847, 3.97362786842444],
[.5937817591748474, 3.97362786842444],
[ 2.890672638762271, 1.061462317070301],
[1.703109120412576, 2.912165551354139]]
```



9. Eine Pyramide habe ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge  $a$  als Grundseite. Diese Grundseite soll auf der  $x$ - $z$ -Ebene symmetrisch zur  $z$ -Achse liegen.
- a) Bestimmen Sie die  $x$ - $z$ -Koordinaten der sechs Eckpunkte  $A$  bis  $F$  der Grundfläche zunächst allgemein.

Für die geforderte Symmetrie legen wir die Punkte  $A$  und  $D$  auf die  $z$ -Achse. Diese haben dann die Koordinaten  $A:[0, -a]$  und  $D:[0, a]$ .

Die Punktepaaire  $B$  und  $F$  sowie  $C$  und  $E$  müssen ebenfalls symmetrisch zur  $z$ -Achse liegen. Ihr jeweiliger Abstand zur  $z$ -Achse und damit ihre  $x$ -Koordinate ist die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge  $a$ , somit  $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ .

Die Punktepaaire  $B$  und  $C$  sowie  $E$  und  $F$  liegen zudem symmetrisch zur  $x$ -Achse. Ihr jeweiliger Abstand zur  $x$ -Achse und damit ihre  $z$ -Koordinate ist die halbe Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks, somit  $\frac{a}{2}$ . Damit folgt für die Koordinaten der weiteren Punkte:

$$B:\left[\frac{a}{2}\sqrt{3}, -\frac{a}{2}\right]; \quad C:\left[\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{a}{2}\right]; \quad E:\left[-\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{a}{2}\right]; \quad F:\left[-\frac{a}{2}\sqrt{3}, -\frac{a}{2}\right];$$

- b) Das regelmäßige Grundflächensechseck habe die Seitenlänge  $a = 6$ . Geben Sie die numerischen Koordinaten der sechs Eckpunkte an.
- $A:[0, -6]; \quad B:[3\sqrt{3}, -3]; \quad C:[3\sqrt{3}, 3]; \quad D:[0, 6] \quad E:[-3\sqrt{3}, 3]; \quad F:[-3\sqrt{3}, -3];$
- c) Die Seitenlinie des Mantels der geraden Pyramide soll die Länge die dreifache Länge der Grundkantenlänge  $a$  haben. Wie lautet die  $y$ -Koordinate der Spitze  $G$  allgemein und numerisch?

Die Länge der Höhe  $h$  berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus der halben Grundflächendiagonalen  $a$  und der Länge der Seitenlinie  $3a$ . Es gilt:

$$h^2 = s^2 - a^2 = (3a)^2 - a^2 = 9a^2 - a^2 = 8a^2$$

Daraus folgt für  $h$ :

$$h = \sqrt{8a^2} = \sqrt{2 \cdot 4a^2} = 2a\sqrt{2}, \text{ numerisch daher } h = 12\sqrt{2}.$$

d) Geben Sie die numerischen Raumkoordinaten der aller Eckpunkte der Pyramide an.

Die x-z-Koordinaten der Grundfläche wurden bereits in b) angegeben. Sie liegen alle in der y-Ebene und haben daher die y-Koordinate 0. Diese muss somit noch als mittlere Koordinate eingeschoben werden:

$$A:[0,0,-6]; \quad B:[3\sqrt{3},0,-3]; \quad C:[3\sqrt{3},0,3]; \quad D:[0,0,6] \quad E:[-3\sqrt{3},0,3]; \quad F:[-3\sqrt{3},0,-3];$$

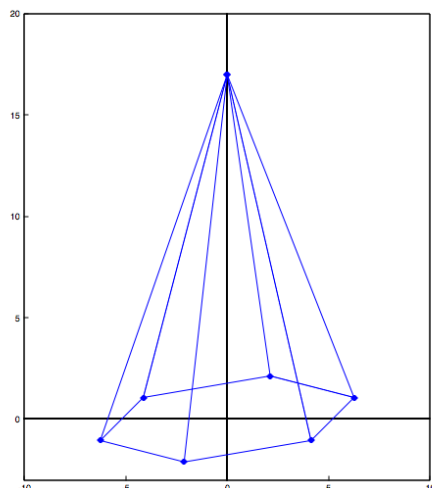
Der Punkt  $G$  der Pyramidenspitze liegt auf der y-Achse und hat daher die Koordinaten

$$G:[0,12\sqrt{2},0]$$

e) Wie müssen Sie die sieben Eckpunkte zu einem Streckenzug anordnen, so dass Maxima die Pyramide im Schrägbild zeichnen kann? Erstellen Sie eine entsprechende Punkteliste.

pyramide3: [A, G, D, C, B, G, E, F, A, B, G, E, D, C, G, F]

f) Lassen Sie die Pyramide von Maxima in der Kavalierperspektive mit den Parametern  $f=0,5$  und  $\varphi=45^\circ$  darstellen.



g) Lassen Sie schließlich die Pyramide in Maxima mit dem Slider gesteuert um  $90^\circ$  in Schritten von  $5^\circ$  um ihre Hochachse drehen.

Man definiert zunächst die Funktion `drehen()`, welche die vorliegenden Raumkoordinaten um den angegebenen Winkel `dw` dreht und dann die gedrehten Raumkoordinaten mit der Funktion `kavalier()` in zweidimensionale Koordinaten umrechnet:

```
drehen(dw):=block(
  [pyramide3d],
  pyramide3d:map(y_drehen,pyramide3),
  map(kavalier,pyramide3d))
```

Dann erstellt man eine Liste mit den gewünschten Winkelschritten:

```
winkelliste:makelist(k*5,k,0,18)
```

Jetzt können die Defaults festgelegt werden:

```
set_draw_defaults(proportional_axes=xy,
  xrange=[-10,10],yrange=[-3,20],
```

```
xaxis=true,yaxis=true,  
xaxis_type=solid,yaxis_type=solid,xaxis_width=2,yaxis_width=2,  
point_size=1,  
points_joined=true,line_width=2)
```

Schließlich lässt man die Bilder erstellen:

```
with_slider_draw(a,winkelliste,points(drehen(a)))
```

Die Maximadatei zu dieser Aufgabe ist auf der Homepage des Buchs unter dem Namen „kg\_aufgaben\_19\_pyramide.wxm“ verfügbar.