Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

In der Literatur wird zuweilen von der Herleitung der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) gesprochen. Diese Wortwahl gibt den Sachverhalt unkorrekt wieder, da die Feldgleichungen so festgelegt werden müssen, dass sie bestimmte Erwartungen erfüllen. Für diesen Prozess ist eine Hinführung möglich, die Motive für die Festlegung benennt. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Albert Einstein wählte 1915 einen an physikalischen Überlegungen orientierten Zugang.[1] Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass jeder Schritt auf „physikalische Stimmigkeit“ überprüft werden kann.

David Hilbert nutzte einen axiomatisch orientierten Ansatz, der die Variationsrechnung verwendet (seine ebenfalls 1915 eingereichte Arbeit enthält jedoch nicht explizit die Einstein'schen Feldgleichungen).

Im Folgenden orientiere ich mich an der Hilbert'schen Darstellung, indem ich das Variationsprinzip auf einen axiomatisch festgesetzten Ansatz für die Lagrangedichte anwende, um zu den Feldgleichungen der ART zu gelangen. Der Nachteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass sie „unphysikalisch“ wirkt. Dem stehen die Vorteile gegenüber, dass sie eindrucksvoll die Leistungsfähigkeit der Variationsrechnung zeigt, eine einheitliche Methodologie bei der Erarbeitung der beiden Grundgleichungen der ART sichert (in Abschn. 3.6.5 meines hier betrachteten Buchs wurde die Geodätengleichung ebenfalls mithilfe des Variationsprinzips gewonnen) und eine Querverbindung zu den relativistischen Quantentheorien und den Quantenfeldtheorien ermöglicht.

1 Vorgehen zur Realisierung des Vorhabens

Es werden verschiedene Ansätze auf Brauchbarkeit getestet, indem jeweils geprüft wird, ob sich daraus ein physikalisch sinnvolles Resultat herleiten lässt. Im vorliegenden Fall ist bereits ein linearer Ansatz zielführend. In der folgenden Darstellung wird ausschließlich der zum Erfolg führende Ansatz benannt und ausgeführt. Deshalb scheint es so, als ob ein axiomatisch gewählter Ansatz unbegründet und unvermittelt „vom Himmel fällt“.

Jeder Ansatz wird mit zunächst unbestimmten Parametern formuliert, die anschließend zu ermitteln sind. Dies kann experimentell erfolgen oder durch Betrachtung von Sonderfällen, welche die allgemeine Formulierung immer noch erfüllen, aber gleichzeitig spezielle Modellierungen ermöglichen. Diese Vorgehensweise ist analog zur Bestimmung der Konstanten im Planck'schen Strahlungsgesetz, die dadurch erfolgte, dass die hergeleitete allgemeine Formel auf die Sonderfälle einer hohen Temperatur bzw. einer kleinen Frequenz angewendet wurde (s. Abschn. 4.2.5 meines hier betrachteten Buchs).

Beim vorliegenden Sachverhalt wird der **Sonderfall** so gewählt, dass die in Anhang 3 dieses Bonusmaterials genannten Gleichungen der Newton'schen Gravitationstheorie gelten:

- **Nebenbedingung 1**: Das Gravitationsfeld ist schwach und zeitunabhängig.
- **Nebenbedingung 2**: Die Bewegung der massebehafteten Körper erfolgt langsam.

Schlussfolgerungen aus Nebenbedingung 1:

Der metrische Tensor der ART geht in den mit kleinen Störgrößen versehenen metrischen Tensor der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) über. Ein zeitunabhängiges Gravitationsfeld besitzt eine zeitunabhängige Metrik. Deshalb gelten:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \text{ mit } \left|h_{\mu\nu}\right| \ll 1, \tag{R1}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial (c\cdot t)} = 0. \tag{R2}$$

Außerdem nehmen wir an, dass auch die Ableitungen und Differenziale der Störgrößen klein sind:

$$\left|\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right| = \left|\frac{\partial\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)}{\partial x^\kappa}\right| = \left|\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right| \ll 1, \tag{R3}$$

$$\delta\left|g_{\mu\nu}\right| = \delta\left|\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right| = \delta\left|h_{\mu\nu}\right| \ll 1. \tag{R4}$$

[1] Ein physikalisch orientierter Zugang wird z. B. in folgender Quelle ausgeführt: Fließbach, T.: Allgemeine Relativitätstheorie, Spektrum, 2006.

Schlussfolgerung aus Nebenbedingung 2:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \ll c \text{ mit } i \in \{1, 2, 3\} . \tag{R5}$$

2 Anwenden des Variationsprinzips

Die **klassische Mechanik** gewinnt aus der mit der **Lagrange-Funktion** $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t)$ definierten **Wirkung** $S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \cdot L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ mithilfe des **Hamilton'schen Variationsprinzips** $\delta S[q(t)] = 0$ die als **Lagrange-Gleichungen** zweiter Art bezeichneten Bewegungsgleichungen $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$, s. Abschn. 1.2.2 meines hier betrachteten Buchs.

Analog kann in der **ART** und in den **Quantenfeldtheorien** die **Wirkung** S mit der **Lagrange-Dichte** $\mathcal{L}$ definiert werden:

$$S = \int \mathcal{L} \cdot \mathrm{d}V . \tag{R6}$$

In das **Volumendifferenzial** N-dimensionaler Räume geht der **metrische Tensor** (g_{ij}) ein:[2]

$$\mathrm{d}V = \sqrt{\left|\det(g_{ij})\right|} \cdot \mathrm{d}x^1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x^N = \sqrt{|g|} \cdot \mathrm{d}x^1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x^N . \tag{R7}$$

Im vorliegenden Fall ist der Raum vierdimensional. In der Literatur wird der Betrag der Determinante g meist mit $-g$ bezeichnet. Damit folgt aus (R6) und (R7) die Beziehung

$$S = \int \mathcal{L} \cdot \sqrt{-g} \cdot \mathrm{d}^4 x . \tag{R8}$$

Das **Hilbert'sche Variationsprinzip** lautet

$$0 = \delta S = \delta \int \mathcal{L} \cdot \sqrt{-g} \cdot \mathrm{d}^4 x . \tag{R9}$$

Es wird folgende **Lagrange-Dichte** $\mathcal{L}$ gewählt (der Ansatz erfolgt axiomatisch so, da er sich als brauchbar erweisen wird):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2 \cdot \kappa} \cdot R - \frac{1}{\kappa} \cdot \Lambda + \mathcal{L}_M . \tag{R10}$$

Die Variablen haben folgende Bedeutung:

$\mathcal{L}$ … gesamte Lagrange-Dichte,

κ … Einstein'sche Gravitationskonstante,

$R = g^{\sigma\nu} \cdot R_{\sigma\nu} = R^{\nu}{}_{\nu} = R_{\sigma}{}^{\sigma}$ … Ricci-Skalar,

Λ … kosmologische Konstante,

$\mathcal{L}_M$ … Lagrange-Dichte aller Materiefelder.

[2] Eine Begründung der Beziehung (R7) habe ich in Anhang 4.6 folgender Quelle gegeben: Wagner, J.: Einstieg in die Hochschulmathematik, Springer Spektrum, 2016.

Bemerkung

1972 stellte James W. York fest, dass der hier genannte Ansatz für die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ für eine Raumzeit-Mannigfaltigkeit ohne Grenze gilt. Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, muss der Gibbons-Hawking-York-Grenzterm hinzugefügt werden.[3] Wir verwenden im Folgenden die **zusätzliche Nebenbedingung** einer unbegrenzten Raumzeit.

Nach dem Einsetzen von (R10) in (R9) kann die Variation ausgeführt werden:

$$0=\delta S=\delta\int\mathcal{L}\cdot\sqrt{-g}\cdot\mathrm{d}^4x=\delta\int\left(\frac{\sqrt{-g}\cdot R}{2\cdot\kappa}-\frac{\sqrt{-g}\cdot\Lambda}{\kappa}+\sqrt{-g}\cdot\mathcal{L}_M\right)\cdot\mathrm{d}^4x\,,$$

$$0=\int\left(\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot R\right)}{2\cdot\kappa}-\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot\Lambda\right)}{\kappa}+\delta\left(\sqrt{-g}\cdot\mathcal{L}_M\right)\right)\cdot\mathrm{d}^4x\,.$$

Für die Nebenrechnungen erweist es sich als günstig, den Integranden mit $\delta g^{\mu\nu}$ zu erweitern. Bei der weiteren Ausführung der Variation wird beachtet, dass $\delta\Lambda=0$ gilt, da Λ eine Konstante ist:

$$0=\int\left(\frac{1}{2\cdot\kappa}\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot R\right)}{\delta g^{\mu\nu}}-\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot\Lambda\right)}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot\mathcal{L}_M\right)}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\cdot\delta g^{\mu\nu}\cdot\mathrm{d}^4x\,,$$

$$0=\int\left(\frac{1}{2\cdot\kappa}\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)\cdot R}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{1}{2\cdot\kappa}\cdot\frac{\sqrt{-g}\cdot\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}-\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)\cdot\Lambda}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)\cdot\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\sqrt{-g}\cdot\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\cdot\delta g^{\mu\nu}\cdot\mathrm{d}^4x\,,$$

$$0=\int\left(\frac{R}{2\cdot\kappa}\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}}+\frac{1}{2\cdot\kappa}\cdot\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}-\frac{\Lambda}{\kappa}\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}}+\mathcal{L}_M\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\cdot\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}\cdot\mathrm{d}^4x\,.$$

Damit die letztgenannte Gleichung für beliebige Variationen $\delta g^{\mu\nu}$ gilt, muss der Klammerausdruck null sein:

$$0=\frac{R}{2\cdot\kappa}\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}}+\frac{1}{2\cdot\kappa}\cdot\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}-\frac{\Lambda}{\kappa}\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}}+\mathcal{L}_M\cdot\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{R11}$$

In (R11) werden die Ergebnisse

$$\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}}=-\frac{g_{\mu\nu}}{2}\quad\text{und}\quad\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}=R_{\mu\nu}$$

von Nebenrechnungen eingesetzt, die in Anhang 1 und Anhang 2 dieses Bonusmaterials ausgelagert werden:

$$0=\frac{R}{2\cdot\kappa}\cdot\left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2}\right)+\frac{1}{2\cdot\kappa}\cdot R_{\mu\nu}-\frac{\Lambda}{\kappa}\cdot\left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2}\right)+\mathcal{L}_M\cdot\left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2}\right)+\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}\,,$$

$$0=R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}\cdot g_{\mu\nu}+\Lambda\cdot g_{\mu\nu}-\kappa\cdot\left(\mathcal{L}_M\cdot g_{\mu\nu}-2\cdot\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}\right).$$

Mit der **Definition des Energie-Impuls-Tensors** $T_{\mu\nu}:=\mathcal{L}_M\cdot g_{\mu\nu}-2\cdot\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ ergibt sich

$$R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}\cdot g_{\mu\nu}+\Lambda\cdot g_{\mu\nu}=\kappa\cdot T_{\mu\nu}\;\ldots\;\textbf{Feldgleichungen der ART}. \tag{R12}$$

---

[3] Nähere Ausführungen enthält z. B. folgende Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Gibbons-Hawking-York_boundary_term. Zugegriffen: 19.04.2023.

Die Einstein'sche Gravitationskonstante κ kann durch die Betrachtung des o. g. Sonderfalls bestimmt werden. In Anhang 3 dieses Bonusmaterials wird folgendes Ergebnis hergeleitet:

$$\kappa = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} . \tag{R13}$$

Wir entnehmen der Beziehung (R13), dass die Einstein'sche Gravitationskonstante κ von der Gravitationskonstante G und der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c abhängig ist.

Anhang 1 Nachweis der Beziehung $\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g} \cdot \delta g^{\mu\nu}} = -\frac{g_{\mu\nu}}{2}$

Teil 1: Herleitung der Jacobi-Formel

Zunächst wird die Jacobi-Formel hergeleitet, die das Differenzial der Determinante einer beliebigen Matrix A angibt. Wird die Determinante $\det(A)$ als Funktion der Elemente A_{ij} der Matrix A aufgefasst, dann gilt

$$\mathrm{d}\det(A) = \sum_{i,j} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} \cdot \mathrm{d}A_{ij} . \tag{R14}$$

Die Determinante $\det(A)$ wird mit dem Entwicklungssatz von Laplace bestimmt, der zu folgender Beziehung führt (eine Begründung dieser Aussage habe ich in Abschn. 2.3.2 des in Fußnote 2 angegebenen Buchs gegeben):

$$A \bullet \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot E . \tag{R15}$$

Dabei ist die Matrix $\mathrm{adj}(A)$ gleich der transponierten Matrix der Cofaktoren C, deren Elemente aus vorzeichenbehafteten Unterdeterminanten (Minoren) U_{ij} bestehen, die aus der Determinante $\det(A)$ durch Streichen der Zeile i und der Spalte j entstehen:

$$\mathrm{adj}(A) = C^T \text{ mit } C = \left((-1)^{i+j} \cdot U_{ij}\right).$$

Achtung!

In der in Fußnote 2 angegebenen Quelle habe ich $\mathrm{adj}(A)$ als adjungierte Matrix bezeichnet.[4] Bei Wikipedia wird dieser Term zweckmäßiger Adjunkte genannt (engl.: adjugate oder classical adjoint, Übersetzung aus dem Englischen: Adjugatmatrix). Die Matrix $\mathrm{adj}(A)$ darf nicht mit der „adjungierten Matrix" $\overline{A}^T$ verwechselt werden, die mittels Transponieren und komplexes Konjugieren aus einer gegebenen Matrix gebildet wird.

Ein beliebiges Element P_{ik} der Produktmatrix $P = A \bullet \mathrm{adj}(A)$ lautet

$$P_{ij} = \left(A \bullet \mathrm{adj}(A)\right)_{ij} = \sum_k A_{ik} \cdot \mathrm{adj}(A)_{kj} .$$

In Abschn. 2.3.2 der in Fußnote 2 angegebenen Quelle habe ich gezeigt, dass jedes Element der Hauptdiagonale der Produktmatrix P gleich der Determinante $\det(A)$ ist, deshalb gilt

$$P_{ii} = \left(A \bullet \mathrm{adj}(A)\right)_{ii} = \sum_k A_{ik} \cdot \mathrm{adj}(A)_{ki} = \det(A) . \tag{R16}$$

[4] Dabei orientierte ich mich an folgender Formelsammlung: Bronstein, I. N. et al.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 2008.

Einsetzen von (R16) in (R14) liefert

$$\mathrm{d}\det(A) = \sum_{i,j} \frac{\partial\left(\sum_k A_{ik} \cdot \mathrm{adj}(A)_{ki}\right)}{\partial A_{ij}} \cdot \mathrm{d}A_{ij} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial\left(A_{ik} \cdot \mathrm{adj}(A)_{ki}\right)}{\partial A_{ij}} \cdot \mathrm{d}A_{ij} \ ,$$

$$\mathrm{d}\det(A) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial\left(A_{ik}\right)}{\partial A_{ij}} \cdot \mathrm{adj}(A)_{ki} \cdot \mathrm{d}A_{ij} + \sum_{i,j,k} A_{ik} \cdot \frac{\partial\left(\mathrm{adj}(A)_{ki}\right)}{\partial A_{ij}} \cdot \mathrm{d}A_{ij} \ . \tag{R17}$$

Es gilt $\mathrm{adj}(A)_{ki} = C^T{}_{ki} = C_{ik} = \left((-1)^{i+k} \cdot U_{ik}\right)$. Dabei fehlen in der Unterdeterminante U_{ik} alle Elemente der Zeile *i* und der Spalte *k* der Matrix *A*. Deshalb hängt $\mathrm{adj}(A)_{ki}$ nicht von A_{ij} ab und es gilt $\frac{\partial\left(\mathrm{adj}(A)_{ki}\right)}{\partial A_{ij}} = 0$. Mit diesem Ergebnis und $\frac{\partial\left(A_{ik}\right)}{\partial A_{ij}} = \delta_{kj}$ ergibt sich aus (R17):

$$\mathrm{d}\det(A) = \sum_{i,j,k} \delta_{kj} \cdot \mathrm{adj}(A)_{ki} \cdot \mathrm{d}A_{ij} = \sum_{i,j} \mathrm{adj}(A)_{ji} \cdot \mathrm{d}A_{ij} \ . \tag{R18}$$

Um zur Jacobi-Formel zu kommen, wird (R18) umgeformt. Dabei wird zunächst genutzt, dass für die Elemente des Matrixprodukts $A \bullet B$ folgende Beziehungen gelten:

$$\left(A \bullet B\right)_{jk} = \sum_i A_{ji} \cdot B_{ik} \text{ bzw. } \left(A^T \bullet B\right)_{jk} = \sum_i A^T{}_{ji} \cdot B_{ik} = \sum_i A_{ij} \cdot B_{ik} \ .$$

Durch Spurbildung ergibt sich aus der letztgenannten Beziehung

$$\mathrm{tr}\left(A^T \bullet B\right) = \sum_j \left(A^T \bullet B\right)_{jj} = \sum_{i,j} A_{ij} \cdot B_{ij} \ . \tag{R19}$$

Um (R19) anwenden zu können, wird (R18) umgeformt zu

$$\mathrm{d}\det(A) = \sum_{i,j} \mathrm{adj}^T(A)_{ij} \cdot \mathrm{d}A_{ij} \ . \tag{R20}$$

Nun wird (R19) verwendet:

$$\mathrm{d}\det(A) = \sum_{i,j} \mathrm{adj}^T(A)_{ij} \cdot \mathrm{d}A_{ij} = \mathrm{tr}\left(\mathrm{adj}^{TT}(A) \bullet \mathrm{d}A\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{adj}(A) \bullet \mathrm{d}A\right). \tag{R21}$$

Wenn die Matrix *A* invertierbar ist, dann gilt nach Abschn. 2.3.2 der in Fußnote 2 angegebenen Quelle die Beziehung

$$\mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}. \tag{R22}$$

Unter Beachtung, dass die Spurbildung eine lineare Abbildung ist, ergibt sich durch Einsetzen von (R22) in (R21):

$$\mathrm{d}\det(A) = \sum_{i,j} \mathrm{adj}^T(A)_{ij} \cdot \mathrm{d}A_{ij} = \mathrm{tr}\left(\mathrm{adj}(A) \bullet \mathrm{d}A\right) = \mathrm{tr}\left(\det(A) \cdot A^{-1} \bullet \mathrm{d}A\right) = \det(A) \cdot \mathrm{tr}\left(A^{-1} \bullet \mathrm{d}A\right) \tag{R23}$$

… **Jacobi-Formel**.

Die Beziehung (R23) ist nach Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) benannt.

Teil 2: Anwenden der Jacobi-Formel auf den vorliegenden Sachverhalt

In die Jacobi-Formel werden die Terme

$A=\left(g_{\mu\nu}\right)$, $\det(A)=\det\left(g_{\mu\nu}\right)=g$, $A^{-1}=\left(g^{\mu\nu}\right)=\left(g^{\nu\mu}\right)$ eingesetzt und es wird (R19) verwendet:

$$\delta g=g\cdot\operatorname{tr}\left(\left(g^{\nu\mu}\right)\bullet\delta\left(g_{\mu\nu}\right)\right) \qquad \Big|\operatorname{tr}\left(A^T\bullet B\right)=\sum_{i,j}A_{ij}\cdot B_{ij},$$

$$\delta g=g\cdot\sum_{\mu,\nu}g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu} \qquad |\text{Summenkonvention},$$

$$\delta g=\delta\det\left(g_{\mu\nu}\right)=g\cdot g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu}\,. \tag{R24}$$

Mit (R24) kann $\delta\sqrt{-g}$ bestimmt werden:

$$\delta\sqrt{-g}=\delta(-g)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot(-g)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\cdot\delta g=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{-g}}\cdot\delta g \qquad \Big|\delta g=g\cdot g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu},$$

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{-g}}\cdot g\cdot g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{-g}}\cdot(-g)\cdot g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu}\,. \tag{R25}$$

In (R25) muss nur noch der Term $g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu}$ umgeformt werden, um die geforderte Herleitung zu erbringen. Dazu wird eine Nebenbetrachtung realisiert, in der davon ausgegangen wird, dass es sich bei $\left(g_{\mu\nu}\right)$ und $\left(g^{\mu\nu}\right)$ um inverse Matrizen handelt, deren Produkt gleich der Einheitsmatrix ist. Außerdem wird die Symmetrie der metrischen Tensoren genutzt.

Nebenbetrachtung

Matrixprodukt: $\left(g_{\mu\nu}\right)\bullet\left(g^{\nu\kappa}\right)=\left(\delta_\mu^\kappa\right)$ mit dem Kronecker-Delta δ,

Elemente der Produktmatrix: $g_{\mu\nu}\cdot g^{\nu\kappa}=\delta_\mu^\kappa$,

Summe spezieller Elemente: $g_{\mu\nu}\cdot g^{\nu\mu}=g_{\mu\nu}\cdot g^{\mu\nu}=\delta_\mu^\mu=N$ im N-dimensionalen Raum,

Variation: $\delta N=0=\delta\left(g_{\mu\nu}\cdot g^{\nu\mu}\right)=g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}\cdot\delta g^{\nu\mu}$,

umstellen: $g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}\cdot\delta g^{\mu\nu}$. (R26)

Einsetzen des Ergebnisses (R26) der Nebenbetrachtung in (R25) ergibt:

$$\delta\sqrt{-g}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}\cdot\delta g_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-g}\cdot g_{\mu\nu}\cdot\delta g^{\mu\nu},$$

$\dfrac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}\cdot\delta g^{\mu\nu}}=-\dfrac{g_{\mu\nu}}{2}$ … damit ist die Herleitung erbracht.

Anhang 2 Nachweis der Beziehung $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}=R_{\mu\nu}$

Ausgangspunkt der Betrachtung ist der **Krümmungstensor**, aus dem die Variation bestimmt wird:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}=\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma}-\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma}+\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}-\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\mu\sigma},$$

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}=\partial_\mu\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma}-\partial_\nu\delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma}+\delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}+\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\cdot\delta\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}-\delta\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}-\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\cdot\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\,. \tag{R27}$$

Die Christoffel-Symbole sind keine Tensoren, da sie nicht deren typisches Transformationsverhalten besitzen. Bei der Variation eines Christoffel-Symbols handelt es sich allerdings um eine Differenz zweier Christoffel-

Symbole, die einen Tensor darstellt. Deshalb kann die kovariante Ableitung dieses Tensors gebildet werden. Es zeigt sich, dass $\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ die Differenz folgender kovarianter Ableitungen ist:

$$\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_{\mu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\right). \tag{R28}$$

Nebenbetrachtung: Nachweis von (R28)

$$\nabla_{\mu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right) = \partial_{\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\cdot\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda},$$

$$\nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\right) = \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\cdot\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}.$$

Bei der Differenzbildung wird die Symmetrie der Christoffel-Symbole in den unteren Indizes genutzt:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\right) = \\
&\quad \partial_{\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\cdot\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \cancel{- \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \\
&\quad -\partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\cdot\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \cancel{+ \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \\
&= \partial_{\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\cdot\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\cdot\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \\
&= \delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Aus dem Krümmungstensor entsteht durch Kontraktion (Verjüngung) auf dem ersten und dritten Index der **Ricci-Tensor**:

$$R_{\sigma\nu} := R^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu}. \tag{R29}$$

Die Variation des Ricci-Tensors ergibt sich aus (R28) und (R29)

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu} = \nabla_{\rho}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\right) \;\ldots\; \textbf{Palatini-Identität}. \tag{R30}$$

Die Beziehung (R30) ist nach Attilio Palatini (1889-1949) benannt.

Schließlich erhalten wir den Ricci-Skalar durch

$$R := g^{\sigma\nu}\cdot R_{\sigma\nu} = R^{\nu}{}_{\nu}. \tag{R31}$$

Die Variation des Ricci-Skalars bestimmen wir mit (R31) und (R30):

$$\delta R = \delta\left(g^{\sigma\nu}\cdot R_{\sigma\nu}\right) = \delta g^{\sigma\nu}\cdot R_{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\cdot\delta R_{\sigma\nu},$$

$$\delta R = \delta g^{\sigma\nu}\cdot R_{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\cdot\left(\nabla_{\rho}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\right)\right). \tag{R32}$$

Wir wenden (R3) auf den inversen metrischen Tensor $\left(g^{\sigma\nu}\right)$ an und verfahren „großzügig“ bei der Abschätzung der kovarianten Ableitung der Komponenten dieses Tensors:

$$\nabla_{\rho}g^{\sigma\nu} = \partial_{\rho}g^{\sigma\nu} + g^{\lambda\nu}\cdot\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} + g^{\sigma\lambda}\cdot\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} \approx 0. \tag{R33}$$

Unsere „Großzügigkeit“ bei der Abschätzung der kovarianten Ableitung kann damit rechtfertigt werden, dass die Christoffel-Symbole als Summen betragskleiner Ableitungen von Komponenten des metrischen Tensors dargestellt werden können, z. B. gilt nach Gleichung (3.144) meines hier betrachteten Buchs:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\kappa}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\right). \tag{R34}$$

Mit (R32) und (R33) ergibt sich weiter

$$\delta R = \delta g^{\sigma\nu}\cdot R_{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}\left(g^{\sigma\nu}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right) - \nabla_{\nu}\left(g^{\sigma\nu}\cdot\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\right).$$

Nach einem Tausch stummer Indizes $\nu \leftrightarrow \rho$ und $\rho \leftrightarrow \mu$ im letzten Summanden folgt

$$\delta R = \delta g^{\sigma\nu} \cdot R_{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}\left(g^{\sigma\nu} \cdot \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right) - \nabla_{\rho}\left(g^{\sigma\rho} \cdot \delta\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}\right),$$

$$\delta R = \delta g^{\sigma\nu} \cdot R_{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}\left(g^{\sigma\nu} \cdot \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - g^{\sigma\rho} \cdot \delta\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}\right). \tag{R35}$$

Analog zur Argumentation, die zu (R33) führte, schätzen wir unter Berücksichtigung von (R34) ab, dass folgende Näherung gilt:

$$\nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \approx 0\,. \tag{R36}$$

Aus (R33) und (R36) schließen wir auf $\nabla_{\rho}\left(g^{\sigma\nu} \cdot \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - g^{\sigma\rho} \cdot \delta\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}\right) \approx 0$. Damit ergibt sich aus (R35) die nachzuweisende Gleichung $\dfrac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}$.

Anhang 3 Berechnung der Einstein'schen Gravitationskonstante κ

Das Fundament der Newon'schen und der Einstein'schen Gravitationstheorie bilden jeweils Feld- und Bewegungsgleichungen.

Die **Grundgleichungen der Newon'schen Gravitationstheorie** werden in Abschn. 1.1.1 meines hier betrachteten Buchs thematisiert. In Vektornotation lauten sie

$$\Delta\Phi\left(\vec{x}, t\right) = \nabla^2\Phi\left(\vec{x}, t\right) = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho\left(\vec{x}, t\right) \text{ … Feldgleichung (Gauß'sches Gravitationsgesetz),} \tag{R37}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{g} = -\nabla\Phi\left(\vec{x}(t), t\right) \text{ … Bewegungsgleichung.} \tag{R38}$$

In Tensornotation lauten die Grundgleichungen der Newon'schen Gravitationstheorie

$$\Phi_{,ii} = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \text{ … Feldgleichungen,} \tag{R39}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\Phi_{,i} \text{ … Bewegungsgleichungen.} \tag{R40}$$

Die **Grundgleichungen der Einstein'schen Gravitationstheorie** lauten in Tensornotation (s. Abschn. 3.6.5 und 3.6.7 meines hier betrachteten Buchs)

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} \cdot g_{\mu\nu} + \Lambda \cdot g_{\mu\nu} = \kappa \cdot T_{\mu\nu} \text{ … Feldgleichungen der ART,} \tag{R41}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\sigma}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \text{ … Bewegungsgleichungen der ART (Geodätengleichungen).} \tag{R42}$$

Es wird sich als zweckmäßig erweisen, die **Feldgleichungen der ART in einer modifizierten Form** zu verwenden, indem die kleine kosmologische Konstante Λ null gesetzt wird und die verbliebenen Gleichungen durch „Indexziehen" und Kontraktion wie in Abschn. 3.6.7 meines hier betrachteten Buchs modifiziert werden. Bei den folgenden Umformungen wird berücksichtigt, dass die metrischen Tensoren $\left(g_{\mu\nu}\right)$ und $\left(g^{\mu\nu}\right)$ invers zueinander sind:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \cdot R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} \cdot g^{\mu\nu} \cdot g_{\mu\nu} &= \kappa \cdot g^{\mu\nu} \cdot T_{\mu\nu} \qquad && \left| g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu};\, g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}\right., \\ R^{\nu}{}_{\nu} - \frac{R}{2} \cdot \delta^{\mu}_{\mu} &= \kappa \cdot T^{\nu}{}_{\nu} && \left| R^{\nu}{}_{\nu} = R;\, T^{\nu}{}_{\nu} = T;\, \delta^{\mu}_{\mu} = 4\right., \\ -R &= \kappa \cdot T. \end{aligned}$$

Einsetzen der hergeleiteten Beziehung und von $\Lambda \approx 0$ in (R41) ergibt

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot T \cdot g_{\mu\nu} = \kappa \cdot T_{\mu\nu} ,$$

$$R_{\mu\nu} = \kappa \cdot \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot T \cdot g_{\mu\nu} \right). \tag{R43}$$

Um die Konstante κ zu bestimmen, wenden wir die Grundgleichungen der Einstein'schen Gravitationstheorie auf den o. g. **Sonderfall** schwacher und zeitunabhängiger Felder sowie niedriger Geschwindigkeiten an, da sie unter diesen Bedingungen in die Grundgleichungen der Newton'schen Gravitationstheorie übergehen müssen.

Anpassung der Bewegungsgleichungen der ART an den betrachteten Sonderfall

Zunächst schreiben wir in (R42) unter Verwendung von $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$ (s. (3.34) und (3.12)) die Ableitungen nach τ in Ableitungen nach t um:

$$\frac{\mathrm{d}}{\frac{\mathrm{d}t}{\gamma}} \left(\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\frac{\mathrm{d}t}{\gamma}} \right) = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\frac{\mathrm{d}t}{\gamma}} \cdot \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\frac{\mathrm{d}t}{\gamma}} ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\sigma}{\mathrm{d}t^2} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} . \tag{R44}$$

An dieser Stelle wenden wir (R5) sehr „großzügig" an, indem wir sehr langsame Bewegungen betrachten, für die näherungsweise die Beziehungen $\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} \approx 0$, $\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} \approx 0$ und $\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t} \approx 0$ gelten. Mit $\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(c \cdot t)}{\mathrm{d}t} = c$ geht (R44) über in

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\sigma}{\mathrm{d}t^2} = -c^2 \cdot \Gamma^\sigma_{00} . \tag{R45}$$

Der Fall $\sigma = 0$ kann aus der Betrachtung ausgesondert werden, da $\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}(c \cdot t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0 = -c^2 \cdot \Gamma^0_{00}$. Deshalb kann der Index σ durch $i \in \{1, 2, 3\}$ ersetzt werden und wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = -c^2 \cdot \Gamma^i_{00} . \tag{R46}$$

Nun können wir die Bewegungsgleichungen in Beziehung setzen. Aus (R40) und (R46) ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\Phi_{,i} = -c^2 \cdot \Gamma^i_{00} ,$$

$$\Phi_{,i} = c^2 \cdot \Gamma^i_{00} . \tag{R47}$$

Mithilfe einer weiteren Ableitung erhalten wir aus (R47) einen Übergang zu den Feldgleichungen:

$$\Phi_{,ii} = c^2 \cdot \Gamma^i_{00,i} . \tag{R48}$$

Anpassung der Feldgleichungen der ART an den betrachteten Sonderfall

Die Zweckmäßigkeit der gewählten Form der Feldgleichungen ergibt sich daraus, dass für niedrige Geschwindigkeiten und statische Felder nach der in Fußnote 1 genannten Quelle folgende Beziehung gilt:

$$\left(T_{\mu\nu}\right)=\begin{pmatrix}\rho\cdot c^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{R49}$$

Aus (R49) entnehmen wir:

$$T_{00}=\rho\cdot c^2; \tag{R50}$$

$$T=g^{\mu\nu}\cdot T_{\mu\nu}=g^{00}\cdot T_{00} \quad \left|g^{00}\approx 1\right.,$$

$$T=T_{00}=\rho\cdot c^2. \tag{R51}$$

Da nur die Komponente für $\mu=\nu=0$ von null verschieden ist, wird auch nur die Komponente R_{00} des Ricci-Tensors bestimmt, die sich aus dem Krümmungstensor durch Kontraktion (Verjüngung) auf dem ersten und dritten Index ergibt:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}=\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma}-\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma}+\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}-\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad \left|\rho=\mu\right.,$$

$$R^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu}=R_{\sigma\nu}=\partial_\rho\Gamma^\rho_{\nu\sigma}-\partial_\nu\Gamma^\rho_{\rho\sigma}+\Gamma^\rho_{\rho\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}-\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \quad \left|\sigma=\nu=0\right.,$$

$$R_{00}=\partial_\rho\Gamma^\rho_{00}-\partial_0\Gamma^\rho_{\rho 0}+\Gamma^\rho_{\rho\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{00}-\Gamma^\rho_{0\lambda}\cdot\Gamma^\lambda_{\rho 0}. \tag{R52}$$

Aus (R3), d. h. $\left|\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right|=\left|\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right|\ll 1$, sowie der Beziehung (R34) für die Christoffel-Symbole, d. h.

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}=g^{\sigma\kappa}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right),$$

entnehmen wir, dass in (R52) die quadratischen Terme vernachlässigt werden können, da sie quadratisch von den kleinen Ableitungen der Störgrößen $h_{\mu\nu}$ abhängen. Da die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des metrischen Tensors bei zeitunabhängigen Gravitationsfeldern nicht von der Zeit abhängen, sind alle Zeitableitungen null. Damit vereinfacht sich (R52) zu

$$R_{00}=\partial_i\Gamma^i_{00}=\Gamma^i_{00,i} \text{ mit } i\in\{1,2,3\}. \tag{R53}$$

Einsetzen von (R53), (R50) und (R51) in die Feldgleichungen (R43) ergibt

$$R_{\mu\nu}=\kappa\cdot\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\cdot T\cdot g_{\mu\nu}\right) \quad \left|\mu=\nu=0\right.,$$

$$R_{00}=\kappa\cdot\left(T_{00}-\frac{1}{2}\cdot T\cdot g_{00}\right) \quad \left|R_{00}=\Gamma^i_{00,i};\,T_{00}=\rho\cdot c^2;\,T=\rho\cdot c^2;\,g_{00}\approx 1\right.,$$

$$\Gamma^i_{00,i}=\kappa\cdot\left(\rho\cdot c^2-\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot c^2\right)=\kappa\cdot\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot c^2. \tag{R54}$$

Nun verwenden wir (R39), (R48) und (R54):

$$4\cdot\pi\cdot G\cdot\rho=\Phi_{,ii}=c^2\cdot\Gamma^i_{00,i}=\kappa\cdot\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot c^4,$$

$$\kappa=\frac{8\cdot\pi\cdot G}{c^4}. \tag{R55}$$

Damit ist die Bestimmung der Einstein'schen Gravitationskonstante κ abgeschlossen.

Bemerkung

In Abschn. 3.6.7 meines hier betrachteten Buchs verwende ich die Einstein'sche Gravitationskonstante κ mit negativem Vorzeichen. Das liegt daran, dass ich diese Konstante aus der in Fußnote 1 angegebenen Quelle übernommen habe, ohne zu berücksichtigen, dass dort der Krümmungstensor mit entgegengesetztem Vorzeichen verwendet wird wie bei mir und in der Wikipedia. Deshalb müssen meine Formeln (3.148) bis (3.151) bezüglich des Vorzeichens dieser Konstanten korrigiert werden.

Aus (R47), d. h $\Phi_{,i}=c^2\cdot\Gamma^i_{00}$, ergeben sich interessante Beziehungen, die in der Literatur auftauchen. Zunächst nehmen die vorkommenden Christoffel-Symbole eine spezielle Form an:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}=g^{\sigma\kappa}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right)\Rightarrow\Gamma^i_{00}=g^{i\kappa}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial g_{\kappa 0}}{\partial x^0}+\frac{\partial g_{0\kappa}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\kappa}\right).$$

Wegen der Zeitunabhängigkeit des metrischen Tensors ergibt sich daraus

$$\Gamma^i_{00}=-\frac{1}{2}\cdot g^{i\kappa}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\kappa}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{g^{i0}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}}_{0}+g^{i1}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}+g^{i2}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2}+g^{i3}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot g^{ij}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}.$$

Die g^{ij} weichen unter den betrachteten Bedingungen für $i\neq j$ wenig von null ab und für $i=j$ wenig von -1. Deshalb gilt näherungsweise

$$\Gamma^i_{00}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}.$$

Mit (R47), d. h. $\Phi_{,i}=c^2\cdot\Gamma^i_{00}$, ergibt sich $\Phi_{,i}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{c^2\cdot g_{00}}{2}\right)$ und damit

$$\Phi=\frac{c^2\cdot g_{00}}{2}+\text{const1}, \text{ d. h. } g_{00}=\frac{2\cdot\Phi}{c^2}+\text{const2} \quad\text{und}\quad \Delta\Phi=\frac{c^2}{2}\cdot\Delta g_{00}.$$

Die Beziehung $g_{00}=2\cdot\Phi/c^2+\text{const2}$ habe ich in Abschn. 3.6.6 meines hier betrachteten Buchs auf einem anderen Weg erhalten.