

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### Übungsaufgaben

1. Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, daß  $(a + b)^2 \geq 4ab$ . 2/4/1
  
2. Es seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . 2/4/2  
 Beweisen Sie die verallgemeinerte Dreiecksungleichung:  $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$ .
  
3. Beweisen Sie: 2/4/3  
 Sind  $a, b \in \mathbb{R}$  und ist  $1 < a$ , dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß  $a^n > b$ .
  
4. Zeigen Sie, daß für  $a \in \mathbb{R}$  und  $a \geq 1$  gilt:  $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$ . 2/4/4
  
5. Für  $a, b \in \mathbb{R}$  zeige man: 2/4/5
  - (a) Wenn  $a, b \geq 0$ , so  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .
  - (b) Wenn  $a, b > 0$ , so  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .
  - (c) Wenn  $a, b > 0$  und  $a \cdot b = 1$ , so  $a + b \geq 2$ .
  
6. Man bestimme die jeweilige Menge der reellen Zahlen  $x$ , die die folgenden Ungleichungen erfüllt: 2/4/6
  - (a)  $\frac{3x+2}{2x+3} > x+1$
  - (b)  $\frac{2x+1}{3x-3} > \frac{3x-3}{2x+1}$
  - (c)  $\frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-2}$ .
  
7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen: 2/4/7
  - (a)  $\frac{|x-1|}{2x+3} = \frac{1}{3}$ ,
  - (b)  $|2x-1| < |x-1|$ ,
  - (c)  $|x+2| + |x-2| \leq 12$ .
  
8. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen  $x$ , für die jeweils gilt: 2/4/8
  - (a)  $||x| + 1| = 2$ ,
  - (b)  $|x-1| \leq |2x+5|$ ,
  - (c)  $|x+1| + |x-1| = |x|$ .

9. Bilden Sie  $M \cap N$ ,  $M \cup N$ ,  $M \setminus N$ ,  $N \setminus M$  für die folgenden Mengen von reellen Zahlen: 2/4/9

$$M = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| > |2x + 3|\},$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 3| < |4x - 7|\}.$$

10. Geben Sie (falls existent) Infimum und Supremum folgender Mengen an: 2/4/10

(a)  $\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^2 - 2x \leq 0\},$

(b)  $\{n : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\},$

(c)  $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\},$

(d)  $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\},$

(e)  $\left\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\}.$

11. Es seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  nichtleere Mengen, die ein Supremum besitzen; außerdem sei  $X + Y = \{x + y : x \in X \text{ und } y \in Y\}.$  2/4/11

Man beweise, daß dann  $\sup X + \sup Y = \sup(X + Y)$  gilt.

12. Berechnen Sie (bzw. zeigen Sie die Nichtexistenz von) Maximum, Minimum, Supremum und Infimum von folgenden Mengen: 2/4/12

(a)  $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ und } r^2 < 3\},$

(b)  $\left\{\frac{n}{2^m} : m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n < m\right\},$

(c)  $\left\{\frac{n}{8^m} : m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq m\right\},$

(d)  $\left\{\frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n^2 < m\right\}.$

13. Beweisen Sie oder widerlegen Sie die Behauptung: 2/4/13

Für  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  gilt:  $\sup\{x - y : x \in X \text{ und } y \in Y\} = \sup X - \inf Y.$

14. Zeigen Sie, daß die Menge  $M = \{n \cdot a^n : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq 1\}$  beschränkt ist, falls  $0 < a < 1.$  2/4/14

Berechnen Sie  $\inf M.$

15. Zu folgenden Mengen gebe man (im Falle der Existenz) Minimum, Maximum, Infimum und Supremum an! 2/4/15

(a)  $M = \{x : \sin x = 0\},$

(b)  $M = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 < \cos 0\},$

- (c)  $M = \{y : \text{es gibt ein } x \text{ mit } \cos x < y\},$
- (d)  $M = \{x : x^2 + 10x + 24 \leq 0\},$
- (e)  $M = \{y : \text{es gibt ein } x \text{ mit } (x, y) \in A\},$  wobei  
 $A = \{(x, y) : x > -1 \text{ und } y > 2x\}.$