

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.19 (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

9/5/14

Ist f in $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f in $[a, b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

9.6 Volumen von Rotationskörpern

Wir wenden uns jetzt der Bestimmung des Volumens eines sogenannten *Rotationskörpers* zu. Zunächst soll aber definiert werden, was unter einem solchen Körper zu verstehen ist.

9/6/0

Dazu sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und sei f eine in I definierte und integrierbare Funktion, die in dem Intervall nicht negativ wird. Dann bestimmt die Punktmenge

$$M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bekanntlich eine Fläche. Läßt man nun diese Fläche um die x -Achse rotieren, dann entsteht eine *Rotationsfigur* oder ein *Rotationskörper* (vgl. Abb. 9.13).

Wir interessieren uns nun für die Frage, ob man diesem Rotationskörper in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zuschreiben kann, und wie man gegebenenfalls dieses Volumen definieren und berechnen könnte.

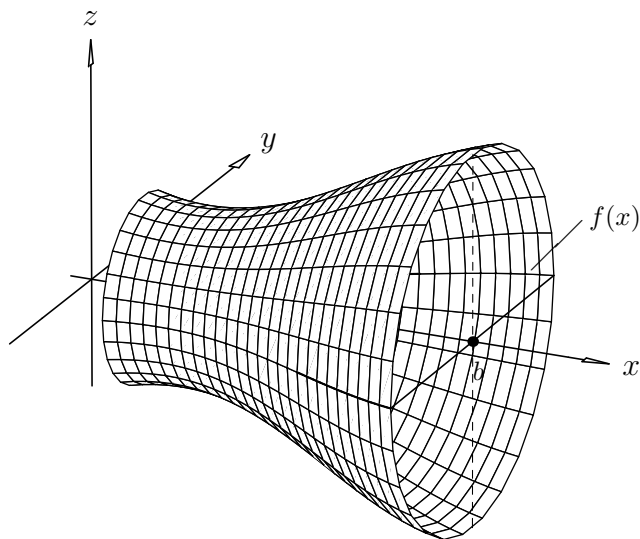


Abb. 9.13 Auf der x -Achse sei ein Intervall $[a, b]$ gegeben, und in diesem Intervall sei eine nicht-negative Funktion $f(x)$ definiert (a ist hier verdeckt). f wird in der (x, y) -Ebene betrachtet. Läßt man f um die x -Achse rotieren, dann entsteht im \mathbb{R}^3 eine Rotationsfigur.

Das Problem ist aufgeworfen, wir versuchen es zu lösen.

Dazu sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I . Parallele Ebenen im \mathbb{R}^3 , die zur x -Achse senkrecht stehen und durch die jeweiligen Zerlegungspunkte auf der x -Achse gehen, schneiden aus der Rotationsfigur Kreisscheiben heraus. Das angenäherte Volumen der Kreisscheibe, die durch die Zerlegungspunkte a_i und a_{i+1} bestimmt wird, kann durch einen geeigneten Kreiszylinder angegeben werden. Dazu sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ beliebig. Dann ist durch $(a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$ das Volumen des entsprechenden Zylinders mit der Höhe $h = a_{i+1} - a_i$ und dem Radius $f(\xi_i)$ gegeben. ξ_i ist eine Zwischenstelle in $[a_i, a_{i+1}]$ (vgl. Abb. 9.8). Entsprechend dieser Überlegung ist durch

$$\tilde{V} = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$$

das angenäherte Volumen der gesamten Rotationsfigur bestimmt. Diese Summe ist offensichtlich eine Zwischensumme der Funktion $\pi \cdot f^2(x)$ bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$. Nach Voraussetzung ist f in I integrierbar, folglich ist auch πf^2 in I integrierbar.

Betrachtet man jetzt eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) von I und eine Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen, dann existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$, und

der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b \pi f^2(x) dx$.

Daher definiert man das Volumen V der Punktmenge M wie folgt:

$$V \stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Beispiele.

(3). Es sei jetzt $I = [1, 2]$ und f, g seien in I definierte Funktionen, so daß $f(x) = x$ und $g(x) = 1$.

9/6/1/3

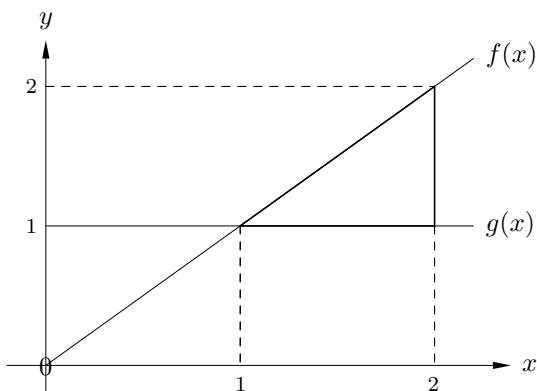


Abb. 9.15 Läßt man die stärker umrandete Dreiecksfläche um die x -Achse rotieren, dann entsteht als Rotationskörper ein „Ring“.

Wir lassen die durch f und g bestimmte Fläche um die x -Achse rotieren und bestimmen das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers.

$$V = \pi \int_1^2 (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Als Spezialfall erhält man das Volumen eines Kegels mit der Höhe h und dem Radius r . Hierfür ist nämlich $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$ und $I = [0, h]$. Also

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$