

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert. f ist in \bar{c} *partiell nach x_i differenzierbar* ($i = 1, \dots, n$)

$\overline{\text{Df}}$ Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$$

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*lokales Extremum*)

8/3/17

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und \bar{c} ein innerer Punkt von $D(f)$.

f besitzt an der Stelle \bar{c} ein *relatives* oder *lokales Extremum* ($:=$ *lokales Minimum* bzw. *lokales Maximum*)

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(\bar{c})$, so daß für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ mit $\bar{x} \neq \bar{c}$ gilt:
 $f(\bar{x}) > f(\bar{c})$ für ein lokales Minimum und
 $f(\bar{x}) < f(\bar{c})$ für ein lokales Maximum.

Satz 8.13 (*Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*)

8/3/18

Sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von \bar{c} definiert und in \bar{c} nach allen Variablen partiell differenzierbar.

Besitzt f in \bar{c} ein lokales Extremum, dann sind alle (ersten) partiellen Ableitungen von f in \bar{c} null.

(Wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = 0$ für $i = 1, \dots, n$, also $\text{grad} f(\bar{c}) = \bar{0}$, dann heißt \bar{c} auch *kritischer* oder *stationärer Punkt* von f .)