

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei \mathbb{M} eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

- (1) $\varrho(a, b) \geq 0$, und $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$.
- (2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Symmetrie)
- (3) $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in \mathbb{M} , und das Paar (\mathbb{M}, ϱ) heißt *metrischer Raum*.

Definition. (*offene Menge*)

6/1/14

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M heißt *offen* (in \mathbb{M})

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $a \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq M$.

(Mit jedem $a \in M$ gehört noch eine ganze ε -Umgebung zu M , vgl. auch Abb. 6.2.)

Satz 6.3 Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$. Ist a ein Häufungspunkt von M , dann liegen in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte aus M . 6/1/21

Definition. (*abgeschlossene Menge*)

6/1/26

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{M}$ ist *abgeschlossen*

$\overline{\text{Df}}$ Jeder Häufungspunkt von M gehört zu M .

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 6.10 (*Folgenstetigkeit*)

6/2/13

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in D(f)$.

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_i) in \mathbb{M}_1 mit $x_i \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_i \rightarrow a_i$, so $f(x_i) \rightarrow f(a)$.

Übungsaufgaben

12. Es sei (\mathbb{M}, ϱ) ein metrischer Raum und $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \varrho(x, a)$ stetig in \mathbb{M} . Zeigen Sie:

6/6/12

- (a) Ist $M_0 \subseteq \mathbb{M}$ abgeschlossen, dann ist $A := \{x \in M_0 : f(x) = 0\}$ abgeschlossen.
- (b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Mengen
 $A_a := \{x \in \mathbb{M} : f(x) > a\}$ und $A_b := \{x \in \mathbb{M} : f(x) < b\}$ offen.