

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Lemma. Es sei $\sum c_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$,
und sei (x_ν) eine Folge mit $x_\nu \neq a$, $|x_\nu - a| < \varrho$ und $\lim x_\nu = a$.
Dann ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$. 4/5/7/2

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Bez.: $f(x) := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 5/3/18
 $f(x) = \exp(x)$ heißt *Exponentialfunktion*.

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $e^x \stackrel{\text{Df}}{=} \exp(x)$. 5/3/22

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient) 7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) differenzierbar

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

Bez. $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Beispiele.

5. Es sei $f(x) = e^x$.

7/1/8/5

Behauptung: $f'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h}, \quad \text{für } h := x - a.$$

$$\text{g.z.z.: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Es ist

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}.$$

Diese Reihe ist für alle $h \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Nach dem Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (Kapitel 4, 4/5/7/2) sind Potenzreihen in ihrem Mittelpunkt stetig.

Der Mittelpunkt ist hier 0, folglich gilt für jede Folge $h_\nu \rightarrow 0$

$$g(h_\nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_\nu^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_\nu^n}{(n+1)!} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 1,$$

Also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$