

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \\ \int \cos x dx = \sin x + c & \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\ \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c & \\ \int e^x dx = e^x + c & \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. & \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.16 (Erweiterter 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/4

Sei $a < b$, seien f, g in $I = [a, b]$ integrierbar, und g wechsle in I nicht das Vorzeichen (d.h., $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ oder $g(x) \leq 0$ für alle $x \in I$).

Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{x \in I} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in I} f(x)$, so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

9.7 Uneigentliche Integrale

Definition. (*uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen*)

9/7/5

Es sei $a < b$ und es gelte eine der Bedingungen:

- (1) f ist in $[a, b)$ definiert und für jedes $x \in [a, b)$ in $[a, x]$ integrierbar.
- (2) f ist in $(a, b]$ definiert und für jedes $x \in (a, b]$ in $[x, b]$ integrierbar.
- (3) $a < c < b$, und f ist für jedes $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ in $[a, x_1]$ und in $[x_2, b]$ integrierbar.

f ist in $[a, b]$ *uneigentlich integrierbar*

$$\overline{\text{Df}} \quad (1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt \quad \text{existiert} \quad \text{bzw.}$$

$$(2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t) dt \quad \text{existiert} \quad \text{bzw.}$$

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \int_x^b f(t) dt \quad \text{existieren.}$$

Diese Limites heißen – falls sie existieren – *uneigentliche Integrale* von f in $[a, b]$, und

$\int_a^b f(t) dt$ heißt dann *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Beispiel. Es sei $[a, b] = [0, 1]$ und $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

9/7/7

Es soll $\int_0^1 f(t) dt$ berechnet werden, falls das uneigentliche Integral konvergiert.

Für $0 < x \leq 1$ ist f in $[x, 1]$ stetig und damit auch integrierbar. Es ist

$$F(x) := \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t} \Big|_x^1 = 2(1 - \sqrt{x}).$$

Folglich gilt

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2(1 - \sqrt{x}) = 2.$$