

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Definition.** (*lokales Extremum*)

8/3/17

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\bar{c}$  ein innerer Punkt von  $D(f)$ .

$f$  besitzt an der Stelle  $\bar{c}$  ein *relatives* oder *lokales Extremum* ( $:=$  *lokales Minimum* bzw. *lokales Maximum*)

$\overline{\text{Df}}$  Es gibt eine Umgebung  $U(\bar{c})$ , so daß für jedes  $\bar{x} \in U(\bar{c})$  mit  $\bar{x} \neq \bar{c}$  gilt:  
 $f(\bar{x}) > f(\bar{c})$  für ein lokales Minimum und  
 $f(\bar{x}) < f(\bar{c})$  für ein lokales Maximum.

**Satz 8.13** (*Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*)

8/3/18

Sei  $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $\bar{c}$  definiert und in  $\bar{c}$  nach allen Variablen partiell differenzierbar.

Besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  ein lokales Extremum, dann sind alle (ersten) partiellen Ableitungen von  $f$  in  $\bar{c}$  null.

(Wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ , also  $\text{grad} f(\bar{c}) = \bar{0}$ , dann heißt  $\bar{c}$  auch *kritischer* oder *stationärer Punkt* von  $f$ .)

**Beispiel.**

8/3/20

Sei  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Wir berechnen die kritischen Stellen von  $f$ . Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 0 \implies x = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \implies y = 0.$$

Die einzige kritische Stelle ist  $(0, 0)$ . Höchstens dort kann  $f$  ein lokales Extremum besitzen.

**Satz 8.14** (*Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*)

8/3/22

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$  und  $f$  sei in einer Umgebung von  $\bar{c}$  zweimal stetig differenzierbar.

Weiterhin sei  $\bar{c}$  ein kritischer Punkt von  $f$  und  $D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{c}) & f_{xy}(\bar{c}) \\ f_{xy}(\bar{c}) & f_{yy}(\bar{c}) \end{vmatrix}$ .

Dann gilt:

- (1) Ist  $D > 0$ , dann besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum, falls  $f_{xx}(\bar{c}) > 0$  und ein lokales Maximum, falls  $f_{xx}(\bar{c}) < 0$ .
- (2) Ist  $D < 0$ , dann besitzt  $f$  in  $\bar{c}$  einen sog. Sattelpunkt (das ist ein kritischer Punkt, in dem die betrachtete Funktion weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt; vgl. Abb. 8.11).
- (3) Ist  $D = 0$ , dann läßt sich (allein mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen) noch keine Aussage treffen.