

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Es sei jetzt  $M$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in C^{k+1}(M)$ . 8/3/10  
Weiterhin seien  $\bar{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\bar{c} = \bar{a} + t \cdot \bar{h}$ , wobei  $t \in [0, 1]$ ,  $\bar{h} = (h_1, h_2)$  und die Verbindungsstrecke  $s(\bar{a}, \bar{b})$  ganz zu  $M$  gehöre. Dann ist

$$\varphi(t) := f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, deren Ableitung sich gemäß der Kettenregel wie folgt berechnet

$$\varphi'(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{c}) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(\bar{c}) \cdot h_2.$$

Für  $\frac{\partial}{\partial x}$  bzw.  $\frac{\partial}{\partial y}$  schreiben wir kurz  $D_1$  bzw.  $D_2$ . Damit ergibt sich

$$\varphi'(t) = h_1 \cdot D_1 f + h_2 \cdot D_2 f = (h_1 D_1 + h_2 D_2) f,$$

wobei das Argument von  $f$  der Einfachheit halber weggelassen wurde.

Für  $n = 2$  ist dann

$$\varphi''(t) = h_1(h_1 D_1 D_1 f + h_2 D_2 D_1 f) + h_2(h_1 D_1 D_2 f + h_2 D_2 D_2 f).$$

Nach dem Satz von Schwarz ist  $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$  und somit erhält man für  $D_i D_i := D_i^2$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\varphi''(t) = h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f.$$

In Analogie zur binomischen Formel schreiben wir für  $h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f$  im folgenden auch  $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(2)} f$ .

Analog erhält man für  $\varphi^{(k)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , die Darstellung

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(k)} f.$$

(Beweis induktiv über  $k$ )

Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^{m+1}(M)$  und sind  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\bar{a} + t \cdot \bar{h}$  mit  $0 \leq t \leq 1$  und  $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$  Elemente aus  $M$ , deren Verbindungsstrecke ganz zu  $M$  gehört, und ist  $\varphi(t) = f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n)$ , dann ist

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{a} + t\bar{h}).$$

Schreibt man  $D_i$  für  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , so erhält man

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n h_i D_i f \quad \text{und} \quad \varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j D_i D_j f \\ &= (h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^{(2)} f,\end{aligned}$$

wenn man den Satz von Schwarz und eine der binomischen Formel (für  $n$  Summanden) analoge Schreibweise benutzt.

Induktiv zeigt man schließlich

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^{(k)} f.$$

Jetzt sind wir in der Lage, den Taylorschen Satz in übersichtlicher Weise zu formulieren.

**Beispiel.** Sei  $f(x, y) = e^{x+y}$  und  $\bar{a} = (a, b) = (0, 0)$ .

8/3/15

Dann ist  $D_1 f(x, y) = e^{x+y}$  und  $D_2 f(x, y) = e^{x+y}$ . Folglich ist  $f$  beliebig oft stetig partiell differenzierbar und es ist  $D_i^k D_j^m f(x, y) = e^{x+y}$  und somit insbesondere  $D_i^k D_j^m f(0, 0) = 1$  für  $i, j \in \{1, 2\}$ .

Wegen  $h_1 = x - 0 = x$ ,  $h_2 = y - 0 = y$  und  $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(m)} f(0, 0) = (x + y)^m$  gilt

$$e^{x+y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (x + y)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i y^{m-i} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i+j=m}^m \frac{1}{i! j!} \cdot x^i y^j.$$

(Man hätte diese Reihe natürlich auch anders gewinnen können.)