

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Definition. (*Potenzen mit rationalen Exponenten*)

2/2/10

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, und es sei $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{Df}}{=} \sqrt[n]{a^m},$$

$$a^{-\frac{m}{n}} \stackrel{\text{Df}}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.11 *Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:*

5/3/19

- (1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3) $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, und
für $x > 0$ ist $1 < \exp(x)$.
- (4) \exp ist streng monoton wachsend
(folglich ist \exp injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5) $\exp(1) = e$ ($e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).
- (6) Für rationale $x = \pm \frac{m}{n}$ ist $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$
(für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).
- (7) \exp ist stetig.

Bemerkung. Bisher ist e^x nur für rationale x definiert. Nach Satz 5.11 (6) gilt für rationale x stets $e^x = \exp(x)$. Wir erweitern jetzt den Definitionsbereich der Funktion e^x auf ganz \mathbb{R} wie folgt:

5/3/21