

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Übungsaufgaben

1. X, Y, Z seien beliebige Mengen. Beweisen Sie: 1/1/1
 - (a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
 - (b) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,
 - (c) $X \cap (X \cup Y) = X$,
 - (d) $X \cup (X \cap Y) = X$,

2. Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ sei stets $C(X)$ das Komplement von X bez. M . 1/1/2
 Zeigen Sie, daß für beliebige Teilmengen $X, Y, Z \subseteq M$ gilt:
 - (a) $C(X \cup Y) = C(X) \cap C(Y)$,
 - (b) $C(X \cap Y) = C(X) \cup C(Y)$,
 - (c) $C(X) \setminus Y = C(X \cup Y)$,
 - (d) $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap C(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) = X \cap C(Y) \cap C(Z)$.

3. Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ sei stets $C(X)$ das Komplement von X bez. M . Weiterhin sei $S = \{X_i : i \in I\}$ ein System von Mengen mit $X_i \subseteq M$. 1/1/3
 Zeigen Sie:
 - (a) $C\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} C(X_i)$,
 - (b) $C\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} C(X_i)$.

4. X, Y, Z seien Mengen von reellen Zahlen, so daß 1/1/4
 $X = \{x : -1 \leq x < 1\}$, $Y = \{x : 1 \leq x \leq 3\}$, $Z = \{x : 2 < x < 4\}$.
 Geben Sie die folgenden Mengen an:

(a) $X \cap Y \cap Z$,	(d) $C(X \cup Z) \cap Y$,
(b) $(X \cup Y) \cap Z$,	(e) $(Y \setminus Z) \cup X$,
(c) $X \cup (Y \cap Z)$,	(f) $Y \setminus (Z \cup X)$.

5. Es sei $M = \{X_i : i \in I\}$ ein System von Mengen mit der Eigenschaft $\bigcap_{i \in I} X_i = \emptyset$. 1/1/5
 Beweisen oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgende Aussage:
 Es gibt zwei Mengen $X_i, X_j \in M$, so daß $X_i \cap X_j = \emptyset$.

6. Untersuchen Sie mit Hilfe von Wertetabellen, ob die folgenden Aussagen gültig sind: 1/1/6
 - (a) $(\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$,
 - (b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

7. Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen äquivalent sind: 1/1/7
- (a) $A \leftrightarrow B$; $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$,
 - (b) $A \rightarrow B$; $B \rightarrow A$,
 - (c) $A \rightarrow B$; $\neg B \rightarrow \neg A$.
8. Man gebe zu folgenden Aussagen je eine logisch äquivalente Alternative an und beweise die Gleichwertigkeit: 1/1/8
- (a) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, (b) $A \rightarrow B$, (c) $\neg(A \rightarrow B)$.
9. Es sei R eine zweistellige Relation in \mathbb{R} . 1/1/9
Verneinen Sie die folgenden Aussagen, und führen Sie die jeweilige Verneinung so weit wie möglich aus:
- (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.
 - (b) Nicht für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$.
 - (c) Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$.
 - (d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.
10. Betrachten Sie in einem rechtwinkligen (x, y) -Koordinatensystem die Geraden g_1, g_2, g_3 mit den sie darstellenden Gleichungen 1/1/10
 $g_1 : y = -x + 8$; $g_2 : y = 3$; $g_3 : y = x + 5$.
 Durch diese Geraden wird ein Dreieck bestimmt. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind !
 Die inneren Punkte dieses Dreiecks sind alle Punkte, für deren Koordinaten (x, y) gilt:
- (a) $y > -x + 8$ oder $y < 3$ oder $y > x + 5$,
 - (b) $y > -x + 8$ und $y < 3$ und $y > x + 5$,
 - (c) $y < -x + 8$ und $y > 3$ und $y < x + 5$,
 - (d) $y < -x + 8$ oder $y > 3$ oder $y < x + 5$.
11. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß 1/1/11
- (a) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für alle $x \geq -1$, (Bernoullische Ungleichung)
 - (b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
12. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: 1/1/12
- (a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.
 - (b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt: $2^n + 1 > n^2$.

13. Beweisen Sie:

1/1/13

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{2n}{n} \geq 2^n$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

14. Beweisen Sie:

1/1/14

(a) Ist $k \in \mathbb{N}$ gerade, so ist k^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 2^n teilbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$ ist $3^n \leq n!$.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

15. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt:

1/1/15

(a) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$,

(b) $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$,

(c) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

16. Es sei a eine reelle Zahl mit $a \neq 0$.

1/1/16

Zeigen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$