

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$ ist *absolut konvergent* $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum |a_i|$ ist konvergent.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Definition. (*Funktionenreihe*)

5/4/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es sei

$F_n := \sum_{i=0}^n f_i$ (die F_n sind also ebenfalls in M definierte Funktionen).

(1) Die Folge (F_n) heißt *Funktionenreihe*.

Bez.: $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ oder einfach $\sum f_i$ bzw. $\sum f_i(x)$

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M *konvergent* (bzw. *gleichmäßig konvergent*) gegen f

$\stackrel{\text{Df}}{=} (F_n)$ ist in M konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen f .

(3) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M *absolut konvergent* gegen f

$\stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ ist in M konvergent gegen f .

Satz 5.19 (*Majorantenkriterium für Funktionenreihen*)

5/4/5

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es seien c_n reelle Zahlen.

Ist $|f_n(x)| \leq c_n$ für fast alle n und alle $x \in M$, und ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, dann

ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig und absolut konvergent in M .

Beispiel. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann sind nach dem obigen Satz die Funktionenreihen

5/4/7

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{mit} \quad f_n(x) = a_n \cdot \sin(nx) \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \quad \text{mit} \quad g_n(x) = a_n \cdot \cos(nx)$$

in \mathbb{R} gleichmäßig konvergent.