

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Bemerkung. Die obige Definition des Integrals über einfachen Bereichen erfaßt nur einen Spezialfall, gewöhnlich wird das Integral allgemeiner definiert, worauf wir hier allerdings verzichten.

10/1/25

Ist $f(x, y)$ in dem einfachen Bereich B stetig und nicht negativ, dann wird der räumlichen Punktmenge $M = \{(x, y, z) : (x, y) \in B \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y, z)\}$ durch

$$V := \iint_B f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{ein Volumen zugeordnet (siehe Abb. 10.7).}$$

10.2 Dreifachintegrale

Einfache Bereiche in \mathbb{R}^3

10/2/12

Es sei $[a_1, b_1]$ ein Intervall in \mathbb{R} , $\varphi_1, \psi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien in $[a_1, b_1]$ stetig, und es sei $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in [a_1, b_1]$. Dann ist

$$B' := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$$

ein x -einfacher Bereich in \mathbb{R}^2 (d.h. in der (x, y) -Ebene). Weiterhin seien φ_2, ψ_2 stetige Funktionen von B' in \mathbb{R} , und für alle $(x, y) \in B'$ gelte stets $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$. Dann heißt

$$B := \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

einfacher Bereich in \mathbb{R}^3 .

Da die Variablen x, y, z hierbei gleichberechtigt sind, hätte man auch mit y oder z beginnen können. Die Entscheidung darüber, mit welcher der Variablen man beginnt, wird vernünftigerweise so getroffen, daß sich die anschließende Integration am einfachsten gestaltet.

Betrachtet man zunächst einen y -einfachen Bereich B' , dann startet man mit einem Intervall $[a_2, b_2]$ und entsprechenden stetigen Funktionen $\varphi_1, \psi_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y)$ für alle $y \in [a_2, b_2]$. Dann ist

$$B' = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), a_2 \leq y \leq b_2\} \quad \text{und}$$

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

In der folgenden Abbildung ist B' ein y -einfacher Bereich und B ein einfacher dreidimensionaler Bereich.

Wir werden jetzt Dreifachintegrale auf einfachen Bereichen definieren.

10/2/14

Dazu sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader und $B \subseteq D$ ein einfacher

Bereich; o.B.d.A. gehen wir von einem x -einfachen Bereich B' über $[a_1, b_1]$ aus.
Sei $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in B definiert und stetig und

$$f^*(\bar{x}) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{für } \bar{x} \in B, \\ 0, & \text{für } \bar{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $x \in [a_1, b_1]$:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_2 \leq y < \varphi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_1(x) < y \leq b_2, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Für jedes $y \in [a_2, b_2]$ erhält man:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_3 \leq z < \varphi_2(x, y), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_2(x, y) < z \leq b_3, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung.

10/2/21

1. Als Volumen eines dreidimensionalen einfachen Bereiches B , der wie in den vorhergehenden Untersuchungen definiert ist, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} V &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} (\psi_2(x, y) - \varphi_2(x, y)) dy \right) dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} 1 dz \right) dy \right) dx \\ &= \iiint_B 1 dx dy dz = \iiint_B dx dy dz. \end{aligned}$$

(Hierbei ist auf B ebenfalls eine Funktion $f(\bar{x})$ definiert, nämlich $f(\bar{x}) = 1$.)

2. Ist B abermals ein einfacher dreidimensionaler Bereich, in dem eine (physikalische) Masse verteilt ist, und gibt die in B stetige Funktion $f(\bar{x})$ die Masseverteilung an, dann liefert $\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x}$ die in B befindliche Gesamtmasse.