

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 5.20** (Reelle) Potenzreihen konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzbereiches gleichmäßig. 5/4/8

## Kapitel 9 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.9 Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 9.24** (Integrierbarkeit der Grenzfunktion) 9/9/1

Sei  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall  $I$  definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  integrierbar, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Limes mit dem Integral)

- (2) Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  integrierbar, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Integrals mit der unendlichen Summe)

**Beweis.** Der Beweis ist nach den Sätzen 5.20 und 9.24(2) trivial. □

9/9/4