

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Satz 8.4 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/19

Ist f in \bar{c} differenzierbar (d.h., es gibt eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, also eine $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ji})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$, so daß $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$ für alle \bar{x} in einer Umgebung $U(\bar{c})$),

dann existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, und es ist $a_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$.

(Die Abbildung A ist also eindeutig bestimmt durch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$.)

Ist $m = 1$, dann besteht die Matrix $A = f'(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{c}) \right)$ nur aus einer Zeile. In diesem Falle hat die 1. Ableitung oder der Gradient von f die Gestalt

8/1/22

$$f'(\bar{c}) = \text{grad } f(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\bar{c}).$$

Ist f in einer ganzen Umgebung $U(\bar{c})$ differenzierbar, dann ist durch $\bar{a} \mapsto f'(\bar{a})$ für jedes $\bar{a} \in U(\bar{c})$ eine Funktion f' definiert. Diese Funktion bezeichnen wir mit

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)};$$

$$\text{für } m = 1 \text{ ist } f' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad } f.$$

Für das Differential von f an der Stelle \bar{c} schreiben wir auch $df(\bar{x}, \bar{c})$ oder kurz $df(\bar{x})$. Mit dieser Bezeichnung läßt sich die Tangentialebene folgendermaßen darstellen:

$$t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + df(\bar{x}, \bar{c}).$$

Wir werden jetzt noch gewisse Techniken im Umgang mit Differentialen entwickeln, die für manche Anwendungen sehr hilfreich sind. Dazu betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f'(c) = \frac{df}{dx}(c) = \frac{dy}{dx}(c)$ für $y = f(x)$.

$\frac{dy}{dx}(c)$ gibt den Anstieg der Tangente von f in c an. Faßt man die Zahl $f'(c)$ als

Bruch $\frac{dy}{dx}$ auf, dann erhält man $dy = f'(c)dx$ (dy hängt hierbei natürlich von c ab). Läßt

man in der „Verhältniszahl“ $f'(c) = \frac{dy}{dx}$ den „Nenner“ dx konstant, dann verändert sich mit c nur noch dy , d.h., dy ist dann eine Funktion von c . (vgl. Abb. 8.4)

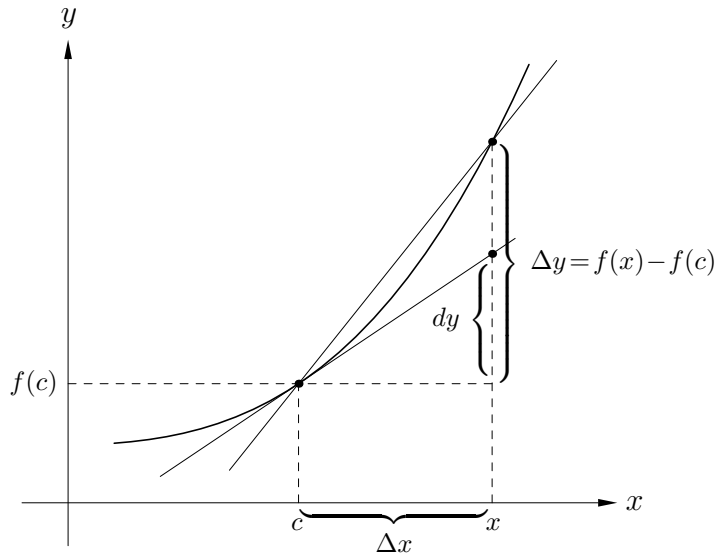


Abb. 8.4 Setzt man $\Delta x := dx$ und läßt dx konstant, dann ist dy nur noch von c abhängig.

Sei jetzt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Manchmal schreibt man für $x_i - c_i$ auch dx_i und damit

$$\bar{x} - \bar{c} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) = (dx_1, \dots, dx_n) := d\bar{x}.$$

Folglich erhält man

$$df(\bar{x}, \bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot d\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot dx_i.$$

Betrachtet man die dx_i als Konstante, dann hängt $df(\bar{x}, \bar{c})$ nur von \bar{c} ab. Damit ist das Differential für die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wieder eine Abbildung aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , $df(\bar{c}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Die Ableitung $f'(\bar{c})$ (mit veränderlichem \bar{c}) ist hingegen eine Vektorfunktion $f'(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\bar{c}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Ableitung von f' (falls sie existiert) ist dann schon eine Matrix (Funktionalmatrix) usw. Die „Dimension“ der Ableitung wird also größer, die des Differentials nicht. Dies ist ein Vorteil, wenn man mit höheren Ableitungen bzw. Differentialen umgehen will.

Wir betrachten jetzt ein einfaches Beispiel für die Berechnung der Tangentialebene.