

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. f ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen*

5/1/7

$\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $(a, b) \in f$.

Bez.: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).

f besitzt an der Stelle a den *Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Beispiele.

1. Es sei $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

5/2/11/1

f ist in $a = 1$ nicht definiert (also auch nicht stetig), aber f besitzt in $a = 1$ einen Grenzwert, nämlich $c = 2$. Dazu betrachten wir für $x \neq 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = \left| \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} - 2 \right| \\ &= |(x + 1) - 2| = |x - 1| := (\star). \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ und wählt man $\delta = \varepsilon$, dann erhält man für $|x - 1| < \delta$:

$|f(x) - 2| = |x - 1| = (\star) < \varepsilon$.