

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

5.2 Stetigkeit

Definition. (*uneigentlicher Grenzwert*)

5/2/7

Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$.

f hat an der Stelle a den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ (bzw. $-\infty$)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $c \in \mathbb{R}$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$
gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $f(x) > c$ (bzw. $f(x) < c$).

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$)

Definition. (*Grenzwert im Unendlichen*)

5/2/9

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $D(f) = [a, \infty)$ (bzw. $D(f) = (-\infty, a]$).

f besitzt für $x \rightarrow \infty$ (bzw. für $x \rightarrow -\infty$) den *Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt:
Wenn $x > b$ (bzw. $x < b$), so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$)

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert*)

6/3/48

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$

bzw. von $D_l(f, a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.

f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$ bzw.
für jedes $x \in D_l(f, a)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c$ bzw.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c$$

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.13 Es sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:

7/3/9

- (1) f ist in I monoton wachsend gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.
- (2) f ist in I streng monoton wachsend gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

Definition. (konvex)

7/3/12

Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar.

- (1) f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von unten

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

- (2) f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von oben

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

Satz 7.14 Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:

7/3/14

f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von unten gdw f' in I monoton (bzw. streng monoton) wächst.

(Der Satz gilt analog für „von oben“ und „monoton fallend“.)

Korollar. Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar.

7/3/16

- (1) f ist in I konvex von unten gdw $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.
- (2) f ist in I streng konvex von unten gdw $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f''(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

(3) Die Behauptungen gelten analog für konvex bzw. streng konvex von oben.

Definition. (lokales Extremum)

7/3/19

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ definiert und $c \in I$.

f besitzt an der Stelle c (oder kurz in c) ein lokales oder relatives Extremum
 (:= lokales Maximum bzw. lokales Minimum)

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(c)$, so daß für jedes $x \in U(c)$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(c) > f(x)$ für ein lokales Maximum und
 $f(c) < f(x)$ für ein lokales Minimum.

Satz 7.15 (Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

7/3/21

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ differenzierbar und $c \in I$.

Besitzt f in c ein lokales Extremum, dann ist $f'(c) = 0$.

Bemerkung. Ist f in c differenzierbar und $f'(c) = 0$, dann heißt c auch kritischer oder stationärer Punkt von f .

7/3/23

Aus der Kontraposition von Satz 7.15 folgt sofort, daß f höchstens an den kritischen Stellen ein lokales Extremum besitzen kann. Nur diese Stellen müssen untersucht werden, um alle lokalen Extrema aufzuspüren.

Satz 7.16 (Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

7/3/24

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar und $c \in I$.

Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$ (bzw. $f''(c) < 0$), dann besitzt f in c ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

Definition. (Wendepunkt)

7/3/30

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ stetig und $c \in I$.

f besitzt in c einen Wendepunkt

$\overline{\text{Df}}$ f ist in (a, c) und in (c, b) differenzierbar und es gilt
 (f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von unten
 und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von oben) oder
 (f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von oben
 und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von unten).

Satz 7.19 (Notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes)

7/3/34

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar und $c \in I$.

Besitzt f in c einen Wendepunkt, dann ist $f''(c) = 0$.

Definition. (*Unendlichkeitsstelle*)

7/3/41

Sei $a < b$ und $a \leq c \leq b$ und f in $(a, b) \setminus \{c\}$ definiert.

- (1) Ist $c = a$ bzw. $c = b$, dann besitzt f in c eine *rechtsseitige* (bzw. *linksseitige*) *Unendlichkeitsstelle*

$$\overline{\text{Df}} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > 0}} f(x) = \pm\infty \quad (\text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < 0}} f(x) = \pm\infty).$$

- (2) Ist $a < c < b$, dann besitzt f in c eine *Unendlichkeitsstelle* oder *Polstelle*

$\overline{\text{Df}}$ f besitzt in c eine rechtsseitige und eine linksseitige Unendlichkeitsstelle.

Beispiel einer Kurvendiskussion.

7/3/43

$$\text{Sei } f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; Nullstellen sind nicht vorhanden.

- (a). Monotonie

Wir bilden zunächst

$$f'(x) = -\frac{-2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

Für $x = \pm 1$ sind die Ableitungen nicht definiert.

Ist $x \neq \pm 1$, dann ist der Nenner von f' positiv, und damit gilt:

Wenn $x < -1$, so $f'(x) < 0 \implies f$ ist in $(-\infty, -1)$ streng monoton fallend;

wenn $-1 < x < 0$, so $f'(x) < 0 \implies f$ ist in $(-1, 0)$ streng monoton fallend;

wenn $0 < x < 1$, so $f'(x) > 0 \implies f$ ist in $(0, 1)$ streng monoton wachsend;

wenn $1 < x$, so $f'(x) > 0 \implies f$ ist in $(1, \infty)$ streng monoton wachsend.

- (b). Konvexität

Wir bilden $f''(x)$ und benutzen Satz 7.14 und das Korollar zu diesem Satz. Es ist

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1-x^2)^2 - 2x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}.$$

Der Zähler von f'' ist stets positiv; der Nenner ist in $(-1, 1)$ negativ, sonst (außer in ± 1) positiv. Folglich gilt:

Wenn $x < -1$, so $f''(x) < 0 \implies f$ ist in $(-\infty, -1)$ streng konvex von oben;

wenn $-1 < x < 1$, so $f''(x) > 0 \implies f$ ist in $(-1, 1)$ streng konvex von unten;

wenn $1 < x$, so $f''(x) < 0 \implies f$ ist in $(1, \infty)$ streng konvex von oben.

- (c). Lokale Extrema

Um die kritischen Stellen zu ermitteln, setzen wir zunächst

$$f'(x) = 0 = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \implies x = 0.$$

Also höchstens an der Stelle $x = 0$ besitzt f ein lokales Extremum.

Wir überprüfen jetzt die hinreichende Bedingung.

Es ist $f''(0) = 2 > 0$, folglich besitzt f in $x = 0$ ein lokales Minimum.

Der Extremwert selbst (also das lokale Minimum) ist $f(0) = 1$.

(d). Wendepunkte

Die Gleichung $f''(x) = 0$ besitzt keine Lösung, folglich hat f keinen Wendepunkt.

(e). Unendlichkeitsstellen

Hier kommen höchstens die Stellen ± 1 in Frage, da der Nenner von f an diesen Stellen null wird. Es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty.$$

(f). Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{<0} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{<0} = 0.$$

Insgesamt haben wir über f folgende Informationen:

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
- Nullstellen von f : keine,
- Monotoniebereiche:
In $(-\infty, -1)$ und in $(-1, 0)$ ist f streng monoton fallend,
in $(0, 1)$ und in $(1, \infty)$ ist f streng monoton wachsend.
- Konvexitätsbereiche:
In $(-\infty, -1)$ und in $(1, \infty)$ ist f streng konvex von oben,
in $(-1, 1)$ ist f streng konvex von unten.
- lokale Extrema:
In $x = 0$ besitzt f ein lokales Minimum der Größe $f(0) = 1$.
- Wendepunkte: f besitzt keine Wendepunkte.
- Unendlichkeitsstellen:
In -1 besitzt f den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert $-\infty$ bzw. ∞ ,
in 1 besitzt f den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$.
- Verhalten im Unendlichen:
Für $x \rightarrow \pm\infty$ strebt $f(x)$ von unten gegen null.

Aus diesen Informationen kann man den groben Verlauf der Funktion skizzieren.
(vgl. hierzu Abb. 7.14)

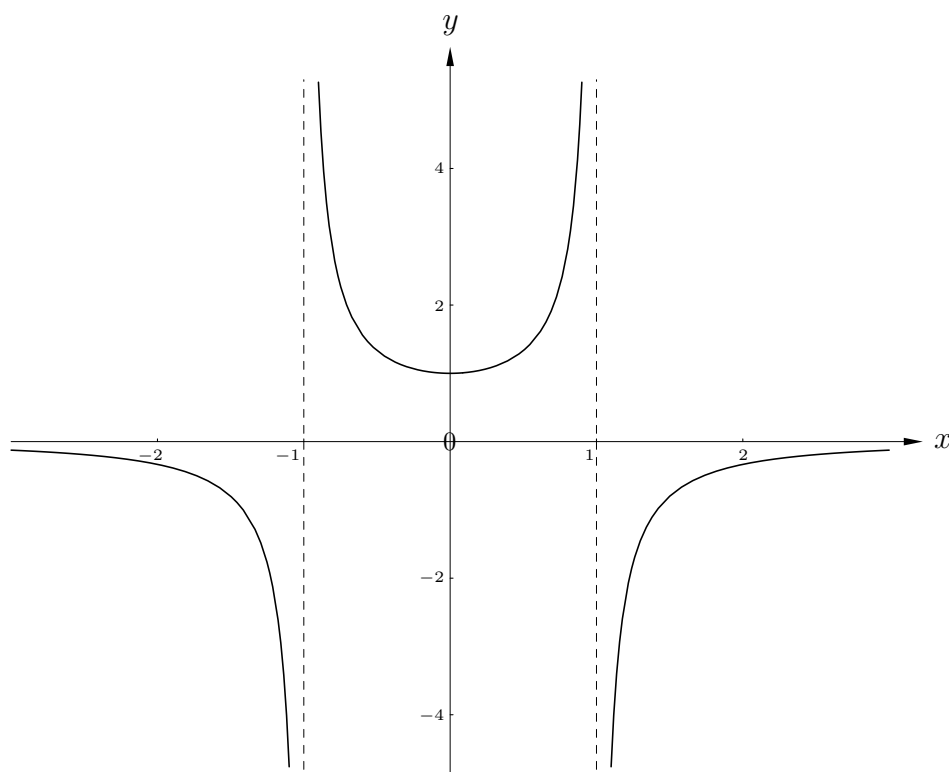


Abb. 7.14 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.