

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.5 Einige wichtige Ergänzungen

**Definition.** (*kompakt*)

6/5/3

Es sei  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

(1)  $M$  ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$  Jede offene Überdeckung von  $M$  enthält eine endliche Teilüberdeckung von  $M$  (d.h., ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , dann existiert ein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}_0 := \{U_1, \dots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$ , so daß schon  $\mathcal{U}_0$  die Menge  $M$  überdeckt).

(2)  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ist *kompakt*

$\overline{\text{Df}}$   $M = \mathbb{M}$  ist kompakt.

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

**Definition.** (*einfacher Bereich*)

10/1/20

Es seien  $[a, b], [c, d]$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

1.  $B$  ist ein  *$x$ -einfacher Bereich* (über  $[a, b]$ )

$\overline{\text{Df}}$  Es gibt Funktionen  $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:

(a)  $\varphi, \psi$  sind stetig in  $[a, b]$ ,

(b)  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  für jedes  $x \in [a, b]$ ,

(c)  $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  (vgl. Abb. 10.4).

2.  $B_1$  ist ein  *$y$ -einfacher Bereich* (über  $[c, d]$ )

$\overline{\text{Df}}$  Es gibt Funktionen  $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:

(a)  $\varphi_1, \psi_1$  sind stetig in  $[c, d]$ ,

(b)  $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$  für jedes  $y \in [c, d]$ ,

(c)  $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$  (vgl. Abb. 10.5).

3.  $B$  ist ein *einfacher Bereich*

$\overline{\text{Df}}$   $B$  ist  $x$ -einfach oder  $y$ -einfach.

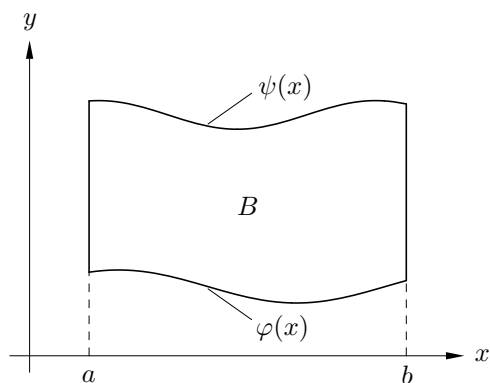


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen  $x$ -einfachen Bereich  $B$ .

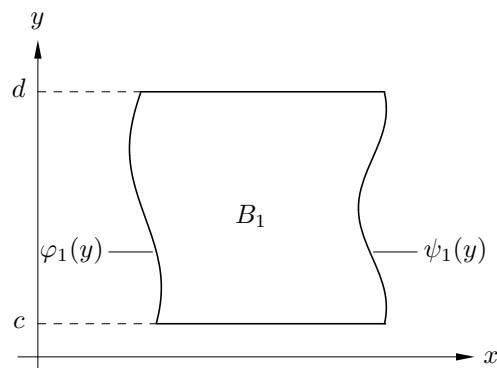


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen  $y$ -einfachen Bereich  $B_1$ .

Bisher ist das Integral nur über Rechteckbereichen  $D = [a, b] \times [c, d]$  definiert. Wir werden die Definition jetzt auf einfache Bereiche erweitern. Dazu sei zunächst  $B$  ein  $x$ -einfacher Bereich (für  $y$ -einfache Bereiche erfolgt die Definition analog), und  $f(x, y)$  sei eine in  $B$  definierte und stetige Funktion.

10/1/21

$B$  sei mit Hilfe der in  $[a, b]$  stetigen Funktionen  $\varphi(x), \psi(x)$  gegeben, und  $D$  sei so gewählt, daß  $B \subseteq D$ , also  $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } c \leq \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \leq d\}$ .

Durch den folgenden „Kunstgriff“ wird der Definitionsbereich von  $f$  auf  $D$  erweitert (vgl. Abb. 10.6).

$$f^*(x, y) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} f(x, y), & \text{für } (x, y) \in B, \\ 0, & \text{für } (x, y) \in D \setminus B. \end{cases}$$

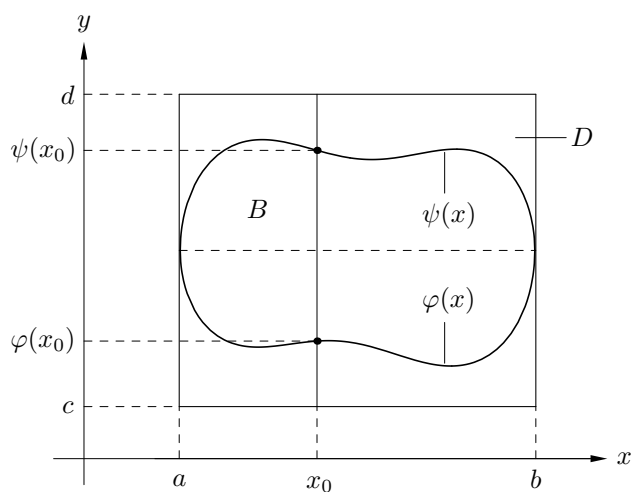


Abb. 10.6 In dieser Abbildung wird ein  $x$ -einfacher Bereich  $B$  dargestellt, der in einem Rechteck  $D$  eingeschlossen ist. Auf  $B$  ist eine Funktion  $f(x, y)$  definiert, die auf  $D$  zu  $f^*(x, y)$  erweitert wird. Fixiert man ein  $x_0 \in [a, b]$ , dann gilt entsprechend der Definition von  $\psi$  und  $\varphi$  stets:  $f^*(x_0, y) = 0$ , falls  $c \leq y < \varphi(x_0)$  oder  $\psi(x_0) < y \leq d$  und  $f^*(x_0, y) = f(x_0, y)$ , anderenfalls.

Man überlegt sich leicht, daß  $B$  kompakt ist, denn  $B$  ist offensichtlich beschränkt, und der Rand von  $B$  gehört zu  $B$ . Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $B$  stetig, also

auch beschränkt. Folglich ist  $f^*$  in  $D$  definiert und beschränkt, aber dort nicht mehr unbedingt stetig.

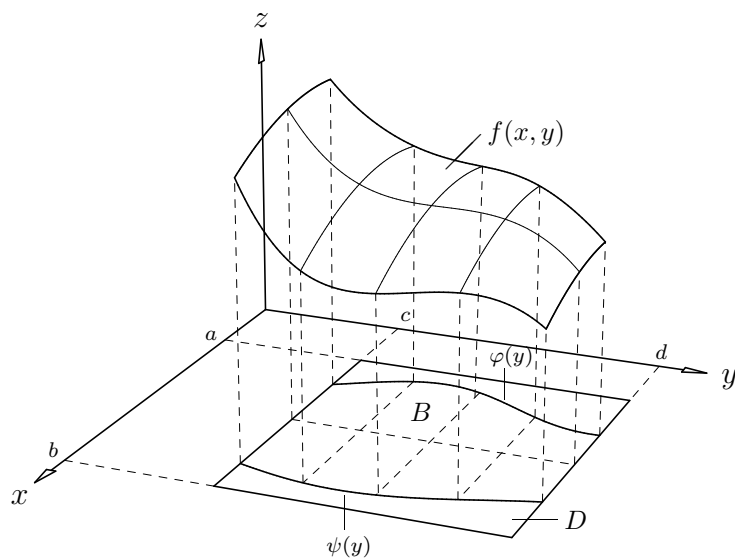


Abb. 10.7

Die Abbildung zeigt die Funktion  $f(x, y)$ , die zunächst nur in dem  $y$ -einfachen Bereich  $B$  definiert ist. Mittels der obigen Definition von  $f^*$  wird  $f(x, y)$  „trivial“ auf den Rechteckbereich  $D$  zu  $f^*(x, y)$  erweitert.