

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Definition.** (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) differenzierbar

$\overline{\text{Def}}$   $f$  ist in einer Umgebung  $U(a)$  definiert, und es existiert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von  $f$  in  $a$ .

$$\text{Bez. } f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

**Satz 7.1** Ist  $f$  in  $a$  differenzierbar, dann ist  $f$  in  $a$  stetig.

7/1/12

**Beweis.** g.z.z.:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

7/1/13

Für  $x \neq a$  ist  $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$ .

Nach Voraussetzung ist  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ , folglich gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Damit erhält man

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad \square$$