

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Definition. (*Funktion* oder *Abbildung*)

1/0/14

(1) f ist eine *Funktion* (oder *Abbildung*)

$\overline{\text{Df}}$ Es existieren Mengen M und N , so daß $f \subseteq M \times N$, und für jedes $a \in M$ gibt es höchstens ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$.
(Eine Funktion ist also eine spezielle Relation.)

(2) f ist eine *Funktion aus M in N*

$\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq M \times N$ und für jedes $a \in M$ gibt es höchstens ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$.

Bez.: $f : M \rightarrow N$.

(3) f ist eine *Funktion von M in N*

$\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq M \times N$ und für jedes $a \in M$ existiert genau ein $b \in N$, so daß $(a, b) \in f$. (Jedes $a \in M$ bestimmt eindeutig ein gewisses $b \in N$.)

Bez.: $f(a) = b$.

In diesem Falle heißt M *Definitionsbereich* (oder *domain*) von f und

$$f(M) := \{b \in N : \text{es existiert ein } a \in M, \text{ so daß } b = f(a)\}$$

Wertebereich oder *Bild* (oder *image*) von f .

Bez.: $M = D(f) = \text{dom}(f)$ und $f(M) = W(f) = \text{im}(f)$.

Für Abbildungen $f : M \rightarrow N$ gilt also im allgemeinen nur $D(f) \subseteq M$ und $W(f) \subseteq N$. N heißt auch *Zielbereich* (oder *range*) von f .

Definition. Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung von M in N .

1/0/15

(1) f ist *surjektiv* oder eine *Abbildung auf N*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $b \in N$ existiert ein $a \in M$, so daß $(a, b) \in f$,
(d.h., $W(f) = N$).

(2) f ist *injektiv* oder *eindeutig* von M in N

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $a_1, a_2 \in M$ gilt: Wenn $a_1 \neq a_2$, so $f(a_1) \neq f(a_2)$.

(3) f ist *bijektiv* oder *eindeutig* von M auf N

$\overline{\text{Df}}$ f ist injektiv und surjektiv.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*inverse Funktion*)

5/1/3

Es sei f injektiv.

g ist *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion* von f

$\stackrel{\text{Def}}{=} (a, b) \in g \text{ gdw } (b, a) \in f, \text{ (d.h., } g(a) = b \iff f(b) = a.)$

Bez.: $g = f^{-1}$.

Folgerungen.

5/1/5

1. Offensichtlich lassen sich Umkehrfunktionen **nur von injektiven Funktionen** definieren, da sonst die Eindeutigkeit an der zweiten Stelle verletzt ist.
2. Es ist stets $D(g) = W(f)$ und $W(g) = D(f)$.
3. g ist invers zu $f \iff f$ ist invers zu g .
4. Für alle $x \in D(f)$ und alle $y \in D(f^{-1})$ gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = y$, also $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$ (wobei I die *Identitätsfunktion* ist, d.h., $I(x) = x$ für alle x).