

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

#### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

- (0)  $0 < 1$ .
- (1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)
- (2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)
- (3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .  
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,  
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,  
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .
- (9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .
- (10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,  
Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .
- (11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .
- (12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.3 Komplexe Zahlen

**Satz 4.17** Für komplexe Zahlen  $z, z_1, z_2$  gilt:

4/3/8

- (1)  $|z| \geq 0$ , und  $|z| = 0 \iff z = 0$ ,
- (2)  $|-z| = |z|$ , ( $\implies |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ )
- (3)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ , ( $\implies |z^n| = |z|^n$ )
- (4)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , falls  $z_2 \neq 0$ ,
- (5)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,
- (6)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .

**Beweis.** (1). Sei  $z = a + ib$ . Dann gilt

4/3/9

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0.$$

(2). Trivial!

(3). Sei  $z_n = a_n + ib_n$ ,  $n = 1, 2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |a_1 a_2 + i^2 \cdot b_1 b_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2| \\ &= |a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)| \\ &= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 b_1 a_2 + b_1^2 a_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(b_2^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

(4). Es genügt zu zeigen:  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ , denn

$$\left| \frac{u}{z} \right| = \left| u \cdot \frac{1}{z} \right| = |u| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = |u| \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{|u|}{|z|}.$$

Wir wissen schon, daß für  $z = a + ib$  und  $c := a^2 + b^2$  gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{c} + i \frac{-b}{c} \implies$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

(5). Es sei  $z_n = a_n + ib_n$ ,  $n = 1, 2$ . Dann ist die linke Seite  $ls$  von (5):

$$ls := |a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2| = |a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

und die rechte Seite  $rs$  ist:

$$rs := |a_1 + ib_1| + |a_2 + ib_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Offenbar sind  $ls, rs \geq 0$ . Folglich ist

$$ls \leq rs \iff ls^2 \leq rs^2 \iff$$

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2) + 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + (a_2^2 + b_2^2) \iff$$

$$2\underbrace{(a_1a_2 + b_1b_2)}_{:= (\star)} \leq 2 \cdot \underbrace{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}_{:= (\star\star)}.$$

Ist  $(\star) < 0$ , dann gilt offenbar die letzte Ungleichung und damit  $ls \leq rs$ .

Es sei jetzt  $(\star) \geq 0$ . dann ist

$$(\star) \leq (\star\star) \iff (\star)^2 \leq (\star\star)^2 \iff$$

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \iff$$

$$a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 \leq a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 \iff$$

$$0 \leq (a_1b_2)^2 - 2a_1b_2b_1a_2 + (b_1a_2)^2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2.$$

Damit gilt insgesamt  $ls \leq rs$ .

(6). Der Beweis hierzu erfolgt durch ähnliche Überlegungen.  $\square$