

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** (*euklidischer Abstand*)

6/1/1

Seien  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ .

$|\bar{a} - \bar{b}| \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$  heißt *euklidischer Abstand* zwischen  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$ .

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 6.17** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ .

6/3/30

Ist  $f$  in  $M$  stetig und  $M$  beschränkt und abgeschlossen, dann ist  $f$  in  $M$  gleichmäßig stetig.

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Definition.** (*Zwischensumme*)

9/3/4

Es sei  $f$  in  $I$  definiert,  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $I$ , und für jedes  $i = 1, \dots, n$  sei  $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ .

Dann nennt man  $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$  ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$ , und  $S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$  heißt *Zwischensumme* von  $f$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$  und dem Zwischenstellensystem  $\tau$ .

#### 9.8 Länge von Kurven

Es sei  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  zunächst eine Kurve und  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Verbindet man die Bildpunkte  $f(a_0), \dots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$  von  $a_0, \dots, a_{n+1}$  der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve einbeschriebener Polygonzug  $P_{\mathfrak{z}}$  (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten  $f(a_i)$  und  $f(a_{i+1})$  auf der Kurve beträgt  $|f(a_{i+1}) - f(a_i)|$ . Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch

9/8/5

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

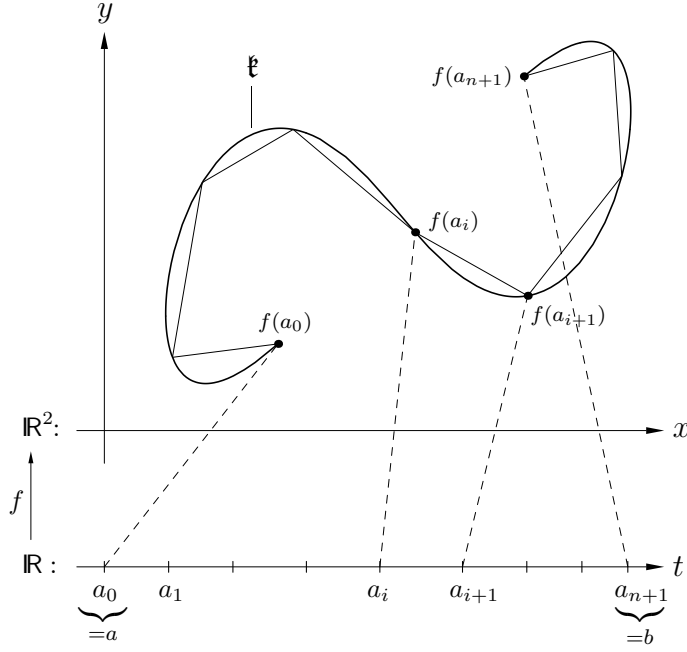


Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im  $\mathbb{R}^2$  mit einem eingeschriebenen Polygonzug. Dabei ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig und  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ . Ist  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ , dann liegen die Bildpunkte  $f(a_i)$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ , auf der Kurve  $\mathfrak{k}$ .

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.

**Lemma.** Es sei  $\mathfrak{k}$  eine durch  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  definierte und stetig differenzierbare Kurve. Weiterhin sei  $(\mathfrak{z}_\nu)$  eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von  $[a, b]$ , und  $(\tau_\nu)$  sei eine Folge zugehöriger Zwischenstellensysteme von  $(\mathfrak{z}_\nu)$ . Dann folgt:

9/8/8

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\nu_0$ , so daß für jedes  $\nu \geq \nu_0$  gilt:

$$|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)| < \varepsilon, \text{ wobei } g(t) = |f'(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(t))^2}.$$

**Beweis.** Sei  $\mathfrak{z}_\nu = (a_0^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$  und  $\tau_\nu = (\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu)$ . Dann gilt

9/8/9

$$|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(\xi_{ij}^\nu))^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) - \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(\xi_i^\nu))^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n_\nu} \left( \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(\xi_{ij}^\nu))^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^k (f'_j(\xi_i^\nu))^2} \right) \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n_\nu} \left| |\bar{\alpha}_i| - |\bar{\beta}_i| \right| \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu), \text{ wobei } \bar{\alpha}_i = (f'_1(\xi_{i1}^\nu), \dots, f'_k(\xi_{ik}^\nu))$$

$$\text{und } \bar{\beta}_i = (f'_1(\xi_i^\nu), \dots, f'_k(\xi_i^\nu))$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^{n_\nu} |\bar{\alpha}_i - \bar{\beta}_i| \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \\
&= \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left( f'_j(\xi_{ij}^\nu) - f'_j(\xi_i^\nu) \right)^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) = (\star).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die Funktionen  $f'_j$  stetig in  $[a, b]$ , also sind sie auch gleichmäßig stetig. Folglich erhält man:

Für jedes  $\varepsilon' > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $\xi_{ij}^\nu, \xi_i^\nu \in [a, b]$  mit  $|\xi_{ij}^\nu - \xi_i^\nu| < \delta$  gilt:  $|f'_j(\xi_{ij}^\nu) - f'_j(\xi_i^\nu)| < \varepsilon'$ , also auch  $\left( f'_j(\xi_{ij}^\nu) - f'_j(\xi_i^\nu) \right)^2 < \varepsilon'^2$ .

Wählt man  $\nu_0$  so groß, daß  $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_0$ , dann erhält man

$$\begin{aligned}
(\star) = \left| l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) \right| &< \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^k \varepsilon'^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \\
&= \varepsilon' \sqrt{k} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)}_{= b-a} \\
&= \varepsilon' \sqrt{k} \cdot (b - a).
\end{aligned}$$

Wir wählen jetzt

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k} \cdot (b - a)}.$$

Dann ist

$$\left| l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) \right| < \varepsilon' \sqrt{k} \cdot (b - a) = \sqrt{k} \cdot (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{k} \cdot (b - a)} = \varepsilon. \quad \square$$