

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.2 Dreifachintegrale

**Korollar.** Ist  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  und  $f(x, y, z)$  in  $D$  stetig, dann ist 10/2/10  
( $f$  in  $D$  integrierbar und)

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Wir werden jetzt Dreifachintegrale auf einfachen Bereichen definieren. 10/2/14

Dazu sei  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Quader und  $B \subseteq D$  ein einfacher Bereich; o.B.d.A. gehen wir von einem  $x$ -einfachen Bereich  $B'$  über  $[a_1, b_1]$  aus.

Sei  $f(x, y, z) := f(\bar{x})$  in  $B$  definiert und stetig und

$$f^*(\bar{x}) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{für } \bar{x} \in B, \\ 0, & \text{für } \bar{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes  $x \in [a_1, b_1]$ :

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_2 \leq y < \varphi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_1(x) < y \leq b_2, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Für jedes  $y \in [a_2, b_2]$  erhält man:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_3 \leq z < \varphi_2(x, y), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_2(x, y) < z \leq b_3, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

**Satz 10.9** (iterierte Integrale über einfachen Bereichen) 10/2/19

Es sei  $B$  ein einfacher Bereich (in  $\mathbb{R}^3$ ) und  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  seien wie oben definiert. Ist  $f(x, y, z)$  in  $B$  stetig, dann ist  $f$  in  $B$  integrierbar, und es gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left( \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

**Beweis.** Den Beweis führt man analog wie im zweidimensionalen Fall, wir werden die Beweisidee skizzieren. 10/2/20

Nach dem Korollar zu Satz Satz 10.7 ist

$$\iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx.$$

Aufgrund der Definition von  $f^*$  in  $D$  gilt für jedes fixierte  $z \in [a_3, b_3]$ :

$$\begin{aligned} a_3 \leq z < \varphi_2(x, y) &\implies f^*(\bar{x}) = 0, \\ \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y) &\implies f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ \psi_2 < z \leq b_3 &\implies f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz &= \int_{a_3}^{\varphi_2(x, y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=0} dz + \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f^*(\bar{x}) dz + \int_{\psi_2(x, y)}^{b_3} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=0} dz \\ &= \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=f(\bar{x})} dz := G^*(x, y). \end{aligned}$$

Analog erhält man für jedes feste  $y \in [a_2, b_2]$ :

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f^*(\bar{x}) dz \right) dy &= \int_{a_2}^{b_2} G^*(x, y) dy \\ &= \int_{a_2}^{\varphi_1(x)} G^*(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} G^*(x, y) dy + \int_{\psi_1(x)}^{b_2} G^*(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} G^*(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left( \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \underbrace{f^*(\bar{x})}_{=f(\bar{x})} dz \right) dy. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} \iiint_B f(\bar{x}) d\bar{x} &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f^*(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left( \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(\bar{x}) dz \right) dy \right) dx. \quad \square \end{aligned}$$