

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*euklidischer Abstand*)

6/1/1

Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

$|\bar{a} - \bar{b}| \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$ heißt *euklidischer Abstand* zwischen \bar{a} und \bar{b} .

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Zerlegung*)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine *Zerlegung* (oder *Partition*) von I

$\stackrel{\text{Def}}{=} \mathfrak{z}$ ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

9.8 Länge von Kurven

Zur Erinnerung: $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ ist eine Kurve in \mathbb{R}^k , falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Vektorfunktion ist. 9/8/0

Es sei $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ zunächst eine Kurve und $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Verbindet man die Bildpunkte $f(a_0), \dots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$ von a_0, \dots, a_{n+1} der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve eingeschriebener Polygonzug $P_{\mathfrak{z}}$ (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten $f(a_i)$ und $f(a_{i+1})$ auf der Kurve beträgt $|f(a_{i+1}) - f(a_i)|$. Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch

9/8/5

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

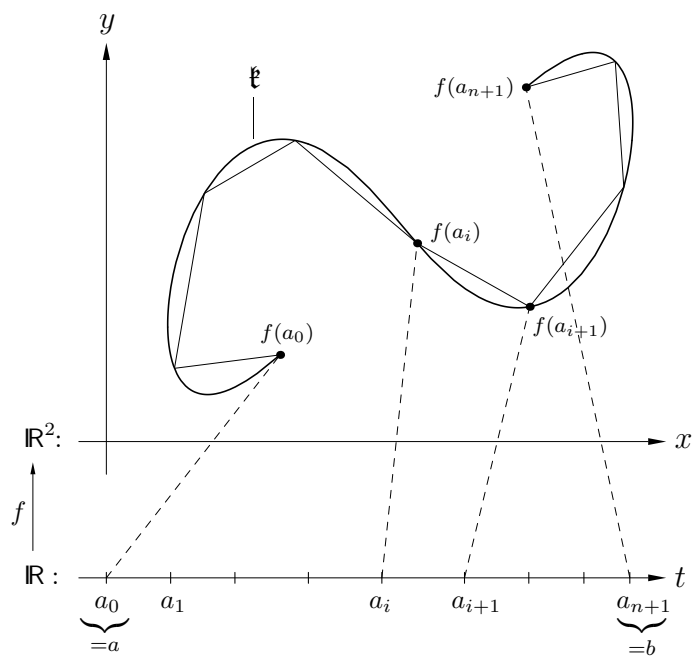


Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im \mathbb{R}^2 mit einem eingeschriebenen Polygonzug. Dabei ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$. Ist $\mathfrak{J} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann liegen die Bildpunkte $f(a_i)$, $i = 0, \dots, n + 1$, auf der Kurve \mathfrak{k} .

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.