

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Damit übertragen sich sehr viele Konvergenzeigenschaften für Folgen in \mathbb{R} auf Folgen in \mathbb{R}^n ; insbesondere gilt: 6/1/39

Ist (\bar{x}_i) in \mathbb{R}^n beschränkt ($:=$ die Menge $\{\bar{x}_i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ ist beschränkt), dann existiert ein Häufungspunkt \bar{a} von (\bar{x}_i) und eine Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) von (\bar{x}_i) , die gegen \bar{a} konvergiert.

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $f(M)$ beschränkt ist. 6/3/17

Angenommen, $f(M)$ ist nicht beschränkt.

Dann gilt: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\bar{x} \in M$, so daß $|f(\bar{x})| \geq c$.

Speziell für $c = c_i = i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ existieren dann Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots \in M$, so daß $|f(\bar{x}_i)| \geq c_i = i$.

Wegen $\bar{x}_i \in M$ ist die Folge (\bar{x}_i) beschränkt, folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine gegen \bar{a} konvergente Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) .

Wenn $\bar{x}_{i_j} = \bar{a}$ für ein j , dann ist $\bar{a} \in M$.

Wenn $\bar{x}_{i_j} \neq \bar{a}$ für alle j , dann ist \bar{a} ein Häufungspunkt der Menge

$\{\bar{x}_{i_j} : j = 0, 1, 2, \dots\}$, und damit ist auch $\bar{a} \in M$, denn M ist abgeschlossen.

Folglich ist f in \bar{a} definiert und stetig. Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt: $f(\bar{x}_{i_j}) \rightarrow f(\bar{a})$.

Andererseits ist $|f(\bar{x}_{i_j})| \geq c_{i_j} = i_j \rightarrow \infty$. Daher ist $(f(\bar{x}_{i_j}))$ unbeschränkt und somit nicht konvergent. **W!**

Wir zeigen nun, daß $f(M)$ abgeschlossen ist, d.h., ist b ein Häufungspunkt von $f(M)$, dann ist $b \in f(M)$.

Sei b ein Häufungspunkt von $f(M)$. Dann gibt es eine Folge (b_i) mit $b_i \in f(M)$ und $b_i \rightarrow b$. Wegen $b_i \in f(M)$ gibt es ein $\bar{x}_i \in M$, so daß $b_i = f(\bar{x}_i)$. Man erhält also eine Folge (\bar{x}_i) in M , die beschränkt ist, da ja M beschränkt ist. Folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) , die gegen \bar{a} konvergiert.

Wie im ersten Teil des Beweises ist $\bar{a} \in M$ und damit $f(\bar{a}) \in f(M)$, folglich ist f in \bar{a} stetig.

Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt: $b_{i_j} = f(\bar{x}_{i_j}) \rightarrow f(\bar{a}) = b \implies f(\bar{a}) = b \in f(M)$. \square

Satz 6.17 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

6/3/30

Ist f in M stetig und M beschränkt und abgeschlossen, dann ist f in M gleichmäßig stetig.

Beweis. Annahme: f ist in M nicht gleichmäßig stetig.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ Elemente $\bar{x}, \bar{y} \in M$ existieren mit $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$ und $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq \varepsilon$.

Wir wählen jetzt $\delta = \delta_i := \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Für δ_i existieren dann Elemente $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in M$ mit $|\bar{x}_i - \bar{y}_i| < \delta_i < \frac{1}{i}$ und $|f(\bar{x}_i) - f(\bar{y}_i)| \geq \varepsilon$.

Da M beschränkt ist, ist auch die Folge (\bar{x}_i) beschränkt. Folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine gegen \bar{a} konvergente Teilfolge \bar{x}_{i_j} .

Da M abgeschlossen ist, gilt (analog wie im Beweis von Satz 6.14) $\bar{a} \in M$. Damit ist f in \bar{a} definiert und stetig.

Für die Teilfolge (\bar{y}_{i_j}) von (\bar{y}_i) gilt:

$$|\bar{y}_{i_j} - \bar{a}| \leq \underbrace{|\bar{y}_{i_j} - \bar{x}_{i_j}|}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{|\bar{x}_{i_j} - \bar{a}|}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} \implies \bar{y}_{i_j} \longrightarrow \bar{a}.$$

Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ und $\bar{y}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt:

$$f(\bar{x}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}) \quad \text{und} \quad f(\bar{y}_{i_j}) \longrightarrow f(\bar{a}).$$

Also

$$\underbrace{|f(\bar{x}_{i_j}) - f(\bar{y}_{i_j})|}_{\geq \varepsilon} \leq \underbrace{|f(\bar{x}_{i_j}) - f(\bar{a})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(\bar{a}) - f(\bar{y}_{i_j})|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

falls j hinreichend groß ist. $\nexists!$ \square