

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.6 Volumen von Rotationskörpern

Wir wenden uns jetzt der Bestimmung des Volumens eines sogenannten *Rotationskörpers* zu. Zunächst soll aber definiert werden, was unter einem solchen Körper zu verstehen ist. 9/6/0

Dazu sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und sei f eine in I definierte und integrierbare Funktion, die in dem Intervall nicht negativ wird. Dann bestimmt die Punktmenge

$$M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bekanntlich eine Fläche. Läßt man nun diese Fläche um die x -Achse rotieren, dann entsteht eine *Rotationsfigur* oder ein *Rotationskörper* (vgl. Abb. 9.13).

Wir interessieren uns nun für die Frage, ob man diesem Rotationskörper in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zuschreiben kann, und wie man gegebenenfalls dieses Volumen definieren und berechnen könnte.

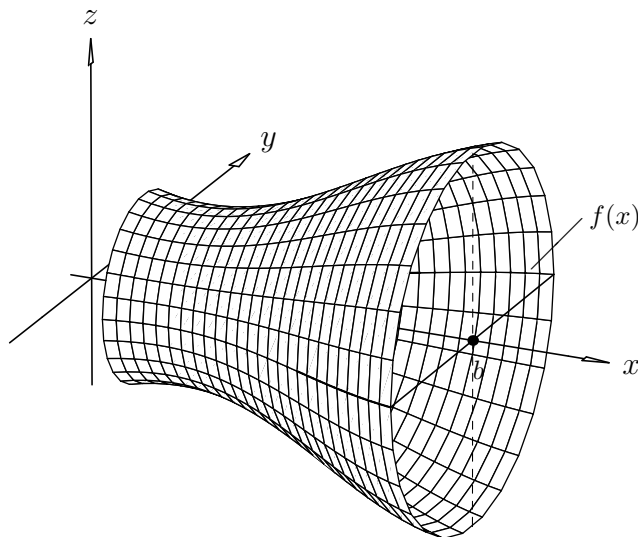


Abb. 9.13 Auf der x -Achse sei ein Intervall $[a, b]$ gegeben, und in diesem Intervall sei eine nicht-negative Funktion $f(x)$ definiert (a ist hier verdeckt). f wird in der (x, y) -Ebene betrachtet. Läßt man f um die x -Achse rotieren, dann entsteht im \mathbb{R}^3 eine Rotationsfigur.

Das Problem ist aufgeworfen, wir versuchen es zu lösen.

Dazu sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I . Parallele Ebenen im \mathbb{R}^3 , die zur x -Achse senkrecht stehen und durch die jeweiligen Zerlegungspunkte auf der x -Achse gehen, schneiden aus der Rotationsfigur Kreisscheiben heraus. Das angenäherte Volumen der Kreisscheibe, die durch die Zerlegungspunkte a_i und a_{i+1} bestimmt wird, kann durch einen geeigneten Kreiszyylinder angegeben werden. Dazu sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ beliebig. Dann ist durch $(a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$ das Volumen des entsprechenden Zylinders

mit der Höhe $h = a_{i+1} - a_i$ und dem Radius $f(\xi_i)$ gegeben. ξ_i ist eine Zwischenstelle in $[a_i, a_{i+1}]$ (vgl. Abb. 9.8). Entsprechend dieser Überlegung ist durch

$$\tilde{V} = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$$

das angenäherte Volumen der gesamten Rotationsfigur bestimmt. Diese Summe ist offensichtlich eine Zwischensumme der Funktion $\pi \cdot f^2(x)$ bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$. Nach Voraussetzung ist f in I integrierbar, folglich ist auch πf^2 in I integrierbar.

Betrachtet man jetzt eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) von I und eine Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen, dann existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$, und der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b \pi f^2(x) dx$.

Daher definiert man das Volumen V der Punktmenge M wie folgt:

$$V \stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Beispiele.

(1). Ist f konstant, $f = r$, dann erhält man mit dieser Formel den Rauminhalt eines Kreiszylinders mit der Höhe $b - a$ und dem Radius r . 9/6/1/1

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b r^2 dx = \pi r^2(b - a) = r^2 \pi h.$$

(2). Es sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $I = [0, 1]$. Dann ist das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers gegeben durch 9/6/1/2

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

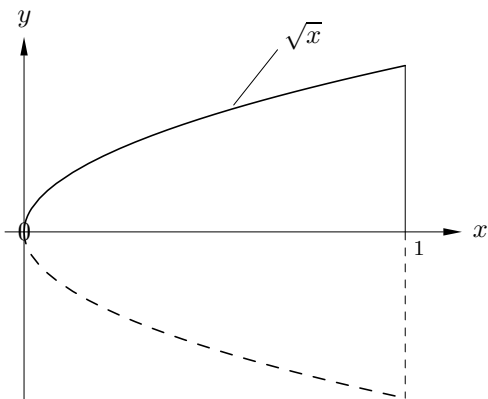


Abb. 9.14 a Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ in der (x, y) -Ebene, definiert im Intervall $[0, 1]$ bzw. die Rotationsfigur im \mathbb{R}^3 , die durch Rotation von f um die x -Achse entsteht. Die z -Achse zeigt in Richtung des Betrachters.

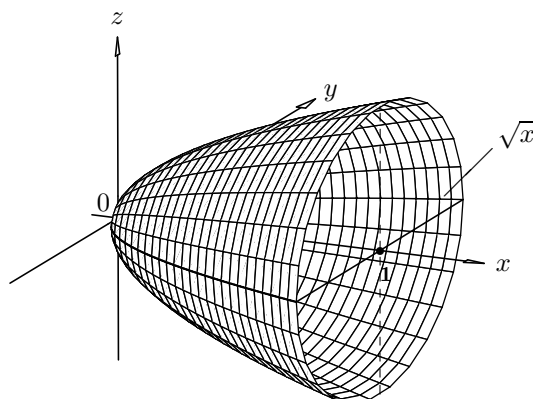


Abb. 9.14 b Diese Abbildung zeigt die gleiche Rotationsfigur wie auf der linken Seite. Diesmal ist jedoch der Rotationskörper räumlich-perspektivisch dargestellt.

- (3). Es sei jetzt $I = [1, 2]$ und f, g seien in I definierte Funktionen, so daß $f(x) = x$ und $g(x) = 1$. 9/6/1/3

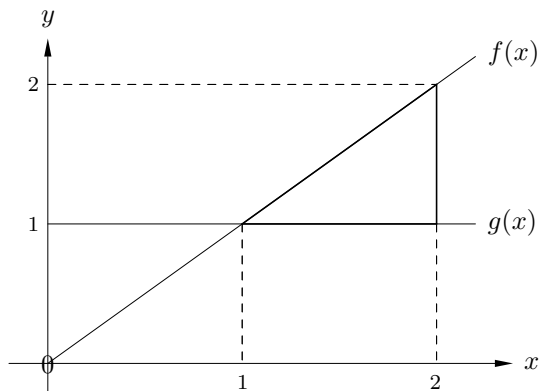


Abb. 9.15 Läßt man die stärker umrandete Dreiecksfläche um die x -Achse rotieren, dann entsteht als Rotationskörper ein „Ring“.

Wir lassen die durch f und g bestimmte Fläche um die x -Achse rotieren und bestimmen das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers.

$$V = \pi \int_1^2 (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Als Spezialfall erhält man das Volumen eines Kegels mit der Höhe h und dem Radius r . Hierfür ist nämlich $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$ und $I = [0, h]$. Also

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

- (4). Wir berechnen jetzt das Volumen eines Torus. 9/6/1/4

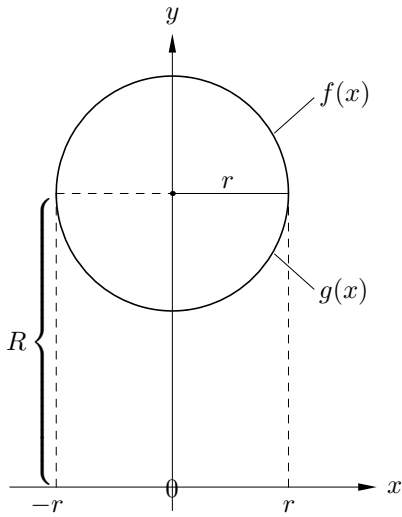


Abb. 9.16 a Die von f und g eingeschlossene Fläche erzeugt bei Rotation um die x -Achse einen *Torus*.

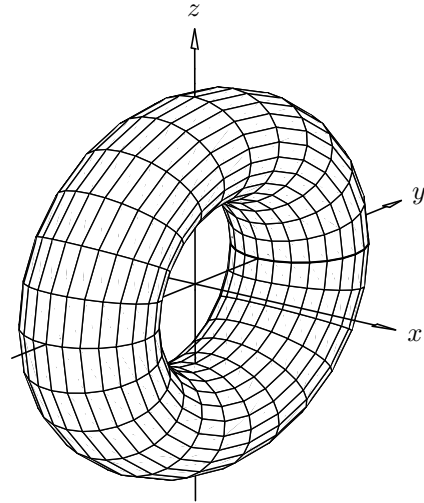


Abb. 9.16 b Die obige Abbildung zeigt diesen *Torus* räumlich-perspektivisch im Raum \mathbb{R}^3 .

Dazu betrachten wir die Gleichung $(y-R)^2 + x^2 = r^2$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0, R)$ und dem Radius r . Löst man diese Gleichung nach y auf, dann erhält man zwei Funktionen $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$; den oberen und unteren Kreisbogen des Kreises. Läßt man die Fläche des entsprechenden Kreises um die x -Achse rotieren, dann erhält man einen *Torus*. Dessen Volumen ist gegeben durch

$$V = \int_{-r}^r (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f^2(x) - g^2(x) &= R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2) \\ &= 4R\sqrt{r^2 - x^2}, \end{aligned}$$

und damit gilt

$$V = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Wir lösen zunächst das unbestimmte Integral, um eine Stammfunktion zu erhalten. Es ist

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= r \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx \\
&= r \int \sqrt{1 - t^2} \cdot r dt; \quad (\text{für } \frac{x}{r} = t) \\
&= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cdot \cos z dz; \quad (\text{für } t = \sin z) \\
&= r^2 \int \cos^2 z dz \quad (\star) \\
&= r^2 (\sin z \cos z + \underbrace{\int \sin^2 z dz}_{= 1 - \cos^2 z}); \quad (\text{partielle Integration}) \\
&= r^2 (\sin z \cos z + z) - r^2 \int \cos^2 z dz.
\end{aligned}$$

Aus (\star) und der letzten Zeile folgt

$$2r^2 \int \cos^2 z dz = \frac{r^2}{2} \sin z \cos z + z = \frac{r^2}{2} \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} + z.$$

Damit haben wir das unbestimmte Integral – allerdings bezüglich z – gelöst. Wir wollen aber das bestimmte Integral bezüglich x in den Grenzen von $-r$ bis r berechnen. Dazu müßten noch die Grenzen entsprechend der Substitutionen transformiert oder die Substitutionen rückgängig gemacht werden. Folgende Substitutionen wurden vorgenommen:

$$t = \sin z \implies z = \arcsin t \quad \text{und} \quad \frac{x}{r} = t \implies z = \arcsin \frac{x}{r}.$$

Für $-r \leq x \leq r$ gilt $-1 \leq \frac{x}{r} \leq 1$ und schließlich $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{r} \leq \frac{\pi}{2}$.

In den betrachteten Intervallen sind die Transformationen bijektiv, folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \frac{r^2}{2} \left(\sin(\arcsin \frac{x}{r}) \cdot \sqrt{1 - \left(\sin(\arcsin \frac{x}{r})\right)^2} + \arcsin \frac{x}{r} \right) \Big|_{-r}^r \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{x}{r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} + \arcsin \frac{x}{r} \right) \Big|_{-r}^r \\
&= \frac{r^2}{2} (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{r^2 \pi}{2}
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, indem die Integrationsgrenzen entsprechend transformiert werden:

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \frac{r^2}{2} (\sin z \cos z + z) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \frac{r^2 \pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also

$$V = 4\pi R \cdot \frac{r^2\pi}{2} = 2r^2 R\pi^2.$$

Allgemeiner gilt die **1. Guldinsche Regel:**

9/6/2

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Flächeninhalt der rotierenden Fläche, multipliziert mit dem Umfang des Kreises, der durch den Mittelpunkt (oder Schwerpunkt) der rotierenden Fläche beschrieben wird.