

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.5 (a_n) konvergiert gegen $a \iff$ jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a . 3/1/21

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen) 4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=}$ (S_n) konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Definition. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. 4/2/1

$\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ entsteht aus $\sum a_n$ durch das Setzen von Klammern

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Es gibt eine streng monoton wachsende Folge $(n_i)_{i=0,1,2,\dots}$ von natürlichen Zahlen, so daß gilt:

$$b_0 = a_0 + \dots + a_{n_0},$$

$$b_1 = a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1},$$

$$\vdots$$

$$b_{i+1} = a_{n_i+1} + \dots + a_{n_{i+1}},$$

$$\vdots$$

Satz 4.11 In einer konvergenten Reihe können Klammern beliebig gesetzt werden, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern. 4/2/3

(D.h., für konvergente Reihen gilt das allgemeinste Assoziativgesetz.)

Beweis. Sei $\sum a_n$ konvergent, $\sum a_n = a$, und sei $\sum b_i$ durch das Setzen von Klammern aus $\sum a_n$ entstanden. Weiterhin sei $S_m = \sum_{n=0}^m a_n$ und 4/2/4

$$S'_m = \sum_{i=0}^m b_i = \underbrace{a_0 + \cdots + a_{n_0}}_{:= b_0} + \cdots + \underbrace{a_{n_{m-1}+1} + \cdots + a_{n_m}}_{b_m} = S_{n_m}.$$

Offenbar ist $(S'_m) = (S_{n_m})$ eine Teilfolge von (S_m) . Wegen $S_m \rightarrow a$ konvergiert auch (S'_m) als Teilfolge von (S_m) gegen a ; also $S'_m \rightarrow a \implies \sum_{i=0}^{\infty} b_i = a$. \square