

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

#### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Definition.** (*Zwischensumme*)

9/3/4

Es sei  $f$  in  $I$  definiert,  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $I$ , und für jedes  $i = 1, \dots, n$  sei  $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ .

Dann nennt man  $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$  ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$ , und  $S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$  heißt *Zwischensumme* von  $f$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$  und dem Zwischenstellensystem  $\tau$ .

**Satz 9.9** Es sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:

9/3/6

$f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge  $(\mathfrak{z}_\nu)$  und jede Folge  $(\tau_\nu)$  von zugehörigen Zwischenstellensystemen  $\tau_\nu$  gilt:

Es existiert  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$  (und der Limes ist gleich dem Integral  $\int_a^b f(x) dx$ .)

**Bemerkung.** Nach dem Satz 9.9 kann man das Riemann-Integral auch als Limes einer Folge von Zwischensummen definieren.

9/3/8