

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Satz 9.5 Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien beliebige Zerlegungen von I . Dann gilt: 9/2/6

- (1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
- (2) $(b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ und $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x)$.
- (3) Ist \mathfrak{z}' eine Verfeinerung von \mathfrak{z} , dann gilt $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.
- (4) Es ist stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2)$.

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Definition. (Untersumme, Obersumme)

10/1/1

- (1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Untersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Def}}{\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot h_{ij}.$$
- (2) $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Obersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Def}}{\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot H_{ij}.$$

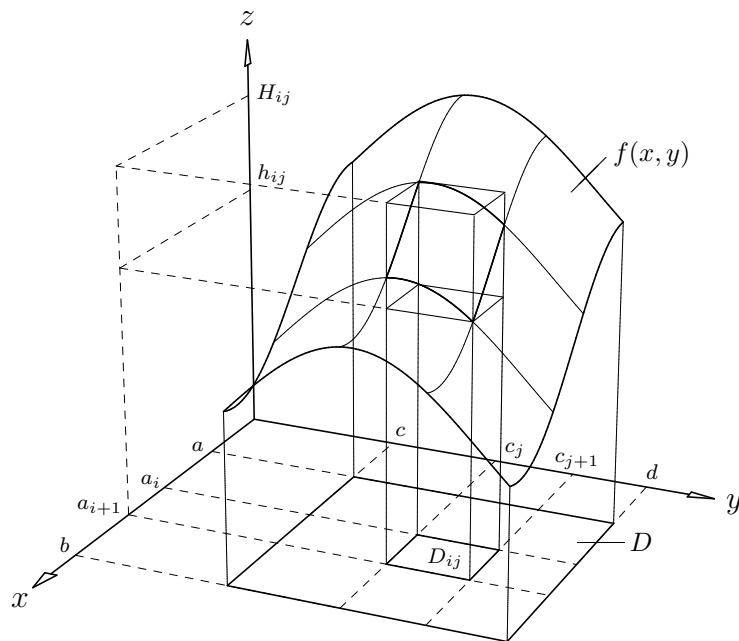


Abb. 10.2 D sei wie in Abb. 10.1 zerlegt. Über den Teilrechtecken D_{ij} werden jeweils Quader mit den Höhen $h_{ij} := \inf_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$ bzw. $H_{ij} := \sup_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$ errichtet. Offenbar ist stets $h_{ij} \leq H_{ij}$. Bildet man die Summe der Volumen der Quader mit den jeweiligen Höhen h_{ij} bzw. H_{ij} , dann erhält man die Untersumme bzw. die Obersumme von f bei der entsprechenden Zerlegung.

Satz 10.1 *Es sei f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D . Dann gilt:* 10/1/3

- (1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.
- (3) Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (4) Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.

Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie den Satz 10.1.

10/3/1