

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.1 Operationen für Funktionen

**Definition.**  $f$  ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen*  
 $\overline{\text{Df}}$   $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und für jedes  $a \in \mathbb{R}$  existiert ein  $b \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a, b) \in f$ .

5/1/7

**Bez.:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*Grenzwert im Unendlichen*)

5/2/9

Es sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $D(f) = [a, \infty)$  (bzw.  $D(f) = (-\infty, a]$ ).

$f$  besitzt für  $x \rightarrow \infty$  (bzw. für  $x \rightarrow -\infty$ ) den *Grenzwert*  $c$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $b \in \mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt:

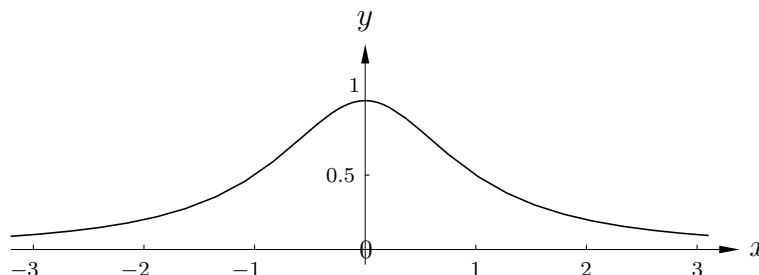
Wenn  $x > b$  (bzw.  $x < b$ ), so  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

**Bez.:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ )

**Beispiele.**

2. Sei  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

Behauptung:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$



5/2/11/2

Abb. 5.14

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $x \geq 1$ . Dann gilt

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x^2 + 1} - 0 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} := (\star).$$

Für alle  $x > \frac{1}{\varepsilon}$  ist  $|f(x) - 0| \leq (\star) = \frac{1}{x} < \varepsilon$ .