

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Bemerkung. Die Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, also die 1. Ableitung der Vektorfunktion f , heißt auch *Funktionalmatrix* oder *Jacobimatrix* von f in \bar{c} . 8/1/21

$$\text{Bez.: } f'(\bar{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{c}) \end{pmatrix} := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{c}).$$

Satz 8.8 (Kettenregel)

8/1/32

Es sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ (also $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$).

Ist g in \bar{c} und f in $g(\bar{c})$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in \bar{c} differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c})$.

(Das Produkt der „inneren“ und der „äußeren“ Ableitung ist ein Produkt von Matrizen.)

Bemerkung. Für $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ stellt sich die Ableitung von $(f \circ g)$ an der Stelle \bar{c} wie folgt dar, wobei $\bar{b} = g(\bar{c})$ ist:

8/1/34

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(\bar{c}) &= f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c}) = f'(\bar{b}) \cdot g'(\bar{c}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(\bar{b}) \cdot \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{c}) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{b}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\bar{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(\bar{b}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial y_m}(\bar{b}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\bar{c}) \end{pmatrix} \\ &= (a_{ji})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, k}} \quad \text{und} \quad a_{ji} = \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu}(\bar{b}) \cdot \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i}(\bar{c}). \end{aligned}$$