

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Definition. (*einfacher Bereich*)

10/1/20

Es seien $[a, b], [c, d]$ Intervalle in \mathbb{R} .

1. B ist ein *x-einfacher Bereich* (über $[a, b]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ, ψ sind stetig in $[a, b]$,
 - (b) $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für jedes $x \in [a, b]$,
 - (c) $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ (vgl. Abb. 10.4).
2. B_1 ist ein *y-einfacher Bereich* (über $[c, d]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ_1, ψ_1 sind stetig in $[c, d]$,
 - (b) $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$ für jedes $y \in [c, d]$,
 - (c) $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$ (vgl. Abb. 10.5).
3. B ist ein *einfacher Bereich*
 $\overline{\text{Df}}$ B ist *x-einfach* oder *y-einfach*.

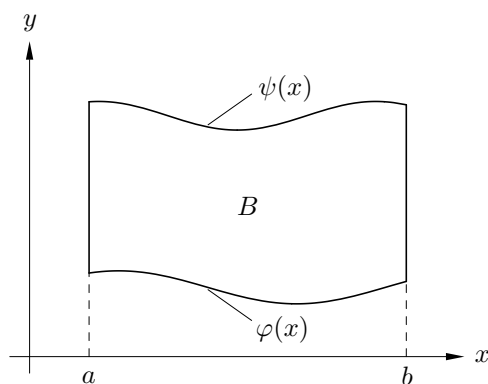


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen *x-einfachen* Bereich B .

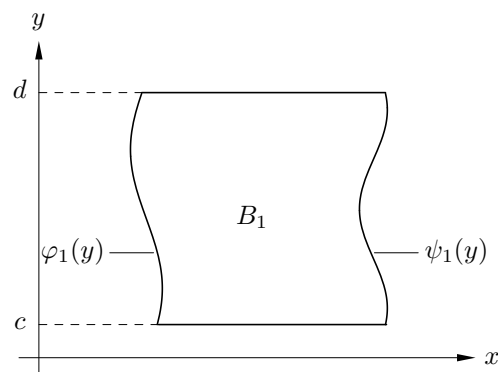


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen *y-einfachen* Bereich B_1 .

10.2 Dreifachintegrale

Einfache Bereiche in \mathbb{R}^3

10/2/12

Es sei $[a_1, b_1]$ ein Intervall in \mathbb{R} , $\varphi_1, \psi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien in $[a_1, b_1]$ stetig, und es sei $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in [a_1, b_1]$. Dann ist

$$B' := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$$

ein x -einfacher Bereich in \mathbb{R}^2 (d.h. in der (x, y) -Ebene). Weiterhin seien φ_2, ψ_2 stetige Funktionen von B' in \mathbb{R} , und für alle $(x, y) \in B'$ gelte stets $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$. Dann heißt

$$B := \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

einfacher Bereich in \mathbb{R}^3 .

Da die Variablen x, y, z hierbei gleichberechtigt sind, hätte man auch mit y oder z beginnen können. Die Entscheidung darüber, mit welcher der Variablen man beginnt, wird vernünftigerweise so getroffen, daß sich die anschließende Integration am einfachsten gestaltet.

Betrachtet man zunächst einen y -einfachen Bereich B' , dann startet man mit einem Intervall $[a_2, b_2]$ und entsprechenden stetigen Funktionen $\varphi_1, \psi_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y)$ für alle $y \in [a_2, b_2]$. Dann ist

$$B' = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), a_2 \leq y \leq b_2\} \quad \text{und}$$

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

In der folgenden Abbildung ist B' ein y -einfacher Bereich und B ein einfacher dreidimensionaler Bereich.