

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Korollar. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist f in $(a-\varrho, a+\varrho)$ beliebig oft differenzierbar, und es ist 7/4/5

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-a)^m \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n(x-a)^{n-k} \\ &= k! \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (x-a)^{n-k} = k! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} (x-a)^m . \end{aligned}$$

Beweis. Den Beweis führt man leicht mit Hilfe des vorhergehenden Satzes induktiv über k . 7/4/6

□