

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Definition. (*unbestimmtes Integral*)

9/1/6

Die Menge aller Stammfunktionen von f in einem Intervall I heißt *unbestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int f(x) dx.$$

Satz 9.4 (*Substitutionsregel*)

9/1/18

Sei g in dem Intervall I und f in dem Intervall J definiert, und es sei $g(I) \subseteq J$. Besitzt f in J eine Stammfunktion und ist g in I differenzierbar, dann besitzt $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in I eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int_{x_0}^x f(g(x))g'(x) dx = \int_{t_0}^t f(t) dt, \quad \text{wobei } x_0 \in I, \quad t = g(x) \quad \text{und} \quad t_0 = g(x_0).$$

Beispiele.

1. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \sqrt{1+x^2} \cdot x dx$.

9/1/21/1

Es sei $I = (-\infty, \infty)$, und $J = [0, \infty)$. Setzt man $f(t) = \sqrt{t}$ und $g(x) = 1 + x^2$, dann ist $g'(x) = 2x$ und $\sqrt{1+x^2} \cdot x = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \cdot 2x = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Eine Stammfunktion von $f(t) = \sqrt{t}$ ist durch $\frac{2}{3}\sqrt{t^3}$ gegeben. Folglich ist

$$\int \sqrt{1+x^2} \cdot x dx = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$