

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Satz 7.11** (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei  $I$  ein Intervall und  $a \in I$ . Ist  $f$  in  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes  $x \in I$  ein  $\vartheta (= \vartheta(x))$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

( $R_n(x)$  heißt Lagrange'sches Restglied,  $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  heißt Taylorpolynom, wobei  $f^{(0)}(x) := f(x)$ , und  $f(x) = p(x) + R_n(x)$  heißt Taylorsche Formel.)

**Korollar.** Es sei  $I$  ein Intervall mit  $a \in I$ ,  $f$  sei in  $I$  beliebig oft differenzierbar, und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ , wobei  $p_n(x)$  das Taylorpolynom und  $R_n(x)$  das Lagrange'sche Restglied in der Taylorschen Formel ist (siehe Satz 7.11). 7/2/12

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  für jedes  $x \in I$ , dann konvergiert die Folge  $(p_n(x))$  der Partialsummen der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  gegen  $f(x)$ .

(Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich  $f$  in eine sog. Taylorreihe entwickeln, d.h.,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.)$$

#### Übungsaufgaben

20. Man gebe die Taylorentwicklung für folgende Funktionen an der Stelle 0 an:

7/5/20

(a)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,      (b)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,      (c)  $f(x) = \ln(2+x)$ .