

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Definition. Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung von M in N .

1/0/15

(1) f ist *surjektiv* oder eine *Abbildung auf* N

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $b \in N$ existiert ein $a \in M$, so daß $(a, b) \in f$,
(d.h., $W(f) = N$).

(2) f ist *injektiv* oder *eindeutig* von M in N

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $a_1, a_2 \in M$ gilt: Wenn $a_1 \neq a_2$, so $f(a_1) \neq f(a_2)$.

(3) f ist *bijektiv* oder *eindeutig* von M auf N

$\overline{\text{Df}}$ f ist injektiv und surjektiv.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Satz 5.1 Ist f streng monoton, dann besitzt f eine Umkehrfunktion.

5/1/13

5.2 Stetigkeit

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Satz 5.4 (*Stetigkeit der rationalen Operationen*)

5/2/17

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.16 *sin und cos haben folgende Eigenschaften:*

5/3/47

- (1) sin und cos sind in \mathbb{R} definiert, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.
- (2) sin ist ungerade und cos ist gerade.
- (3) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ ($\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$).
- (4) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ ($\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).
- (5) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x - y}{2} \cdot \cos \frac{x + y}{2}$.
- (6) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x - y}{2} \cdot \sin \frac{x + y}{2}$.
- (7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$).
- (8) sin und cos sind stetig.

Definition. (π) $\frac{\pi}{2}$ wird als die kleinste positive Nullstelle von cos definiert
(d.h., $\pi = 2c = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \implies 0 < \pi < 4$).

5/3/57

Satz 5.17 sin und cos sind periodisch mit der Periode 2π , und es ist
 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

5/3/60

Definition. (Tangens, Cotangens)

5/3/63

$\tan x \stackrel{\text{Df}}{=} \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x \stackrel{\text{Df}}{=} \frac{\cos x}{\sin x}.$

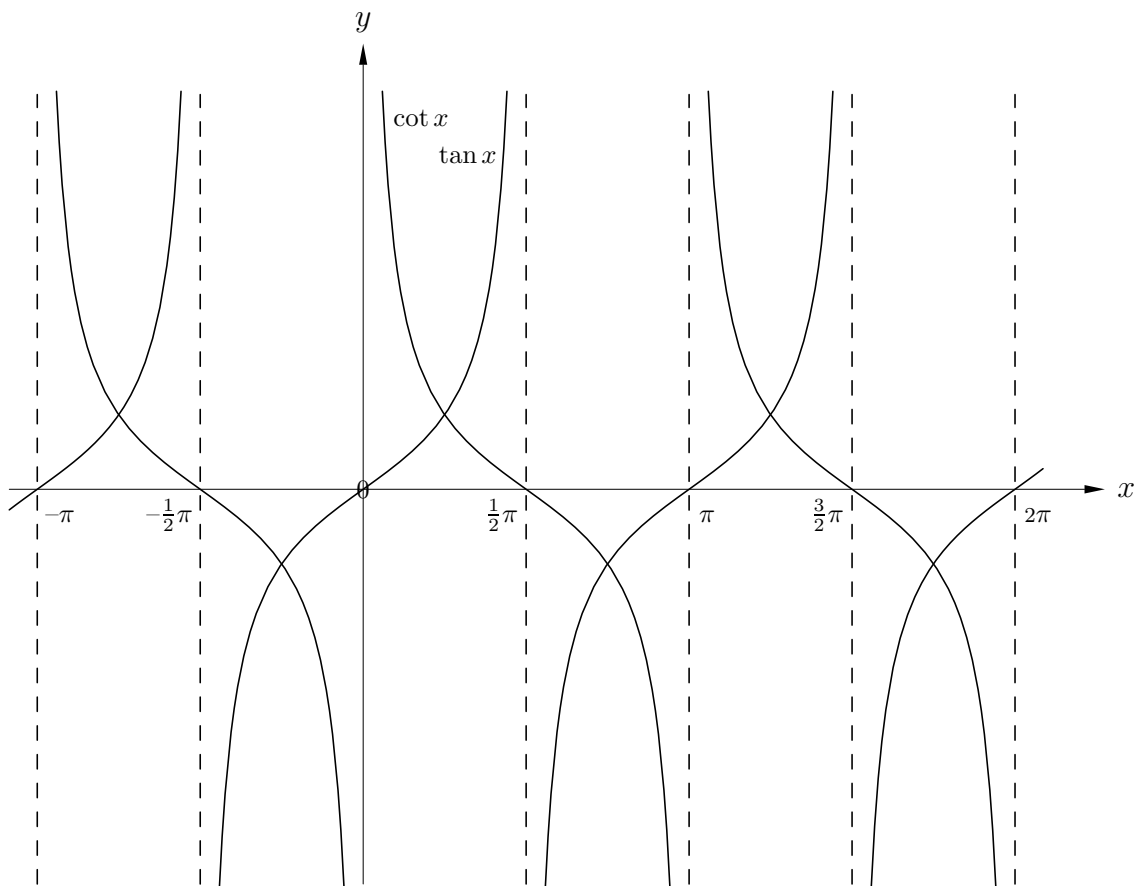


Abb. 5.23 zeigt \tan und \cot im Intervall $[-\pi, 3\pi]$

Bemerkung. Aus der Definition und den Eigenschaften von \sin und \cos erhält man sofort die wichtigsten Eigenschaften von \tan und \cot . Insbesondere gilt:

5/3/64

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}, \quad W(\tan) = \mathbb{R};$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\}, \quad W(\cot) = \mathbb{R}.$$

\tan und \cot sind als Quotienten von stetigen Funktionen wieder stetig;

\tan und \cot sind wie \sin und \cos periodisch, allerdings mit der Periode π .

Ähnlich wie \sin und \cos lassen sich auch \tan und \cot am Einheitskreis geometrisch interpretieren (vgl. Abb 5.21 und 5.24).

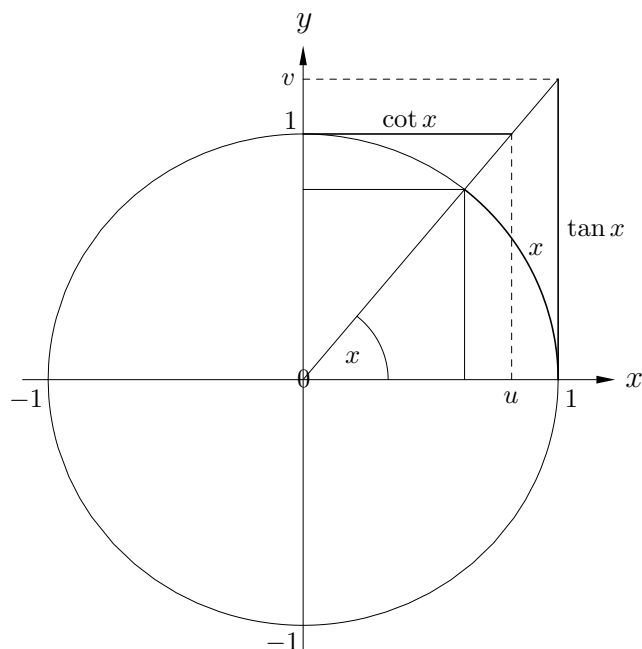


Abb. 5.24 In der Abbildung ist zu erkennen, wie am Einheitskreis die Funktionen \tan und \cot in Abhängigkeit von dem Winkel x (alle hervorgehoben durch dickere Strichstärke; x gemessen in Bogenmaß) veranschaulicht werden können. $\cot x$ bzw. $\tan x$ sind dann definiert durch: $\cot x := u$, $\tan x := v$.

Die trigonometrischen Funktionen \sin , \cos , \tan , \cot sind als periodische Funktionen **nicht** in ihren gesamten Definitionsbereichen injektiv. In den (maximalen) Teilintervallen, in denen sie jedoch injektiv sind (dort sind sie auch stetig und daher streng monoton), besitzen sie Umkehrfunktionen (die sog. *Arcus-Funktionen*; Arcus oder Arkus := Bogenmaß eines Winkels), die der Reihe nach mit \arcsin , \arccos , \arctan , arccot bezeichnet werden.

Zur Veranschaulichung der Arcus-Funktionen betrachte man zunächst die Abb. 5.21. Dort ist der Winkel x in Bogenmaß gegeben (das ist bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten $(1,0)$ und (u,v) im entgegengesetzten Uhrzeigersinn). Für fixiertes x ist $\sin x$ symbolisiert durch die Strecke der Länge v zwischen den Punkten $(u,0)$ und (u,v) . Also

$$\sin x = v \implies \arcsin(\sin x) = \arcsin v = x \quad (:= \text{die zu } \sin x \text{ gehörende Bogenlänge}).$$

Das Analoge gilt für Cosinus, Tangens und Cotangens.

Abschließend werden noch die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen (in geeigneten Intervallen) dargestellt (vgl. Abb. 5.25 – 5.28). Sinus wird in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ und in $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ betrachtet, Cosinus in $[0, \pi]$ und in $[\pi, 2\pi]$. Tangens und Cotangens werden in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bzw. in $[0, \pi]$ dargestellt.

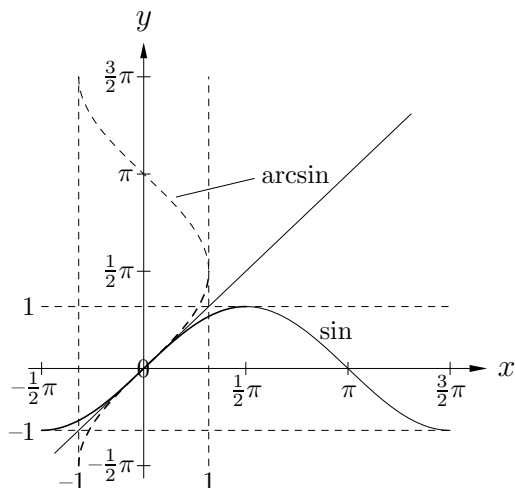


Abb. 5.25 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Sinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Sinus injektiv ist.

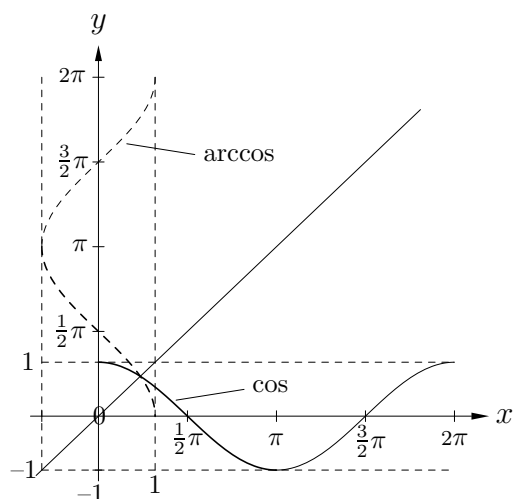


Abb. 5.26 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Cosinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Cosinus injektiv ist.

Analog wie in den vorhergehenden Abbildungen verfahren wir jetzt noch mit Tangens und Cotangens.

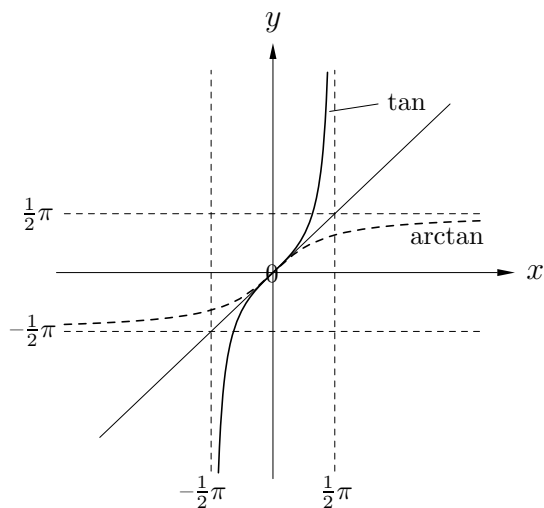


Abb. 5.27 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Tangens in dem Intervall $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

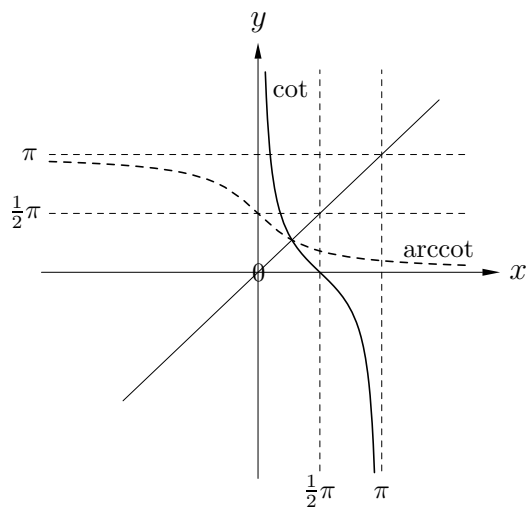


Abb. 5.28 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Cotangens in dem Intervall $(0, \pi)$.