

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

Übungsaufgaben

1. Geben Sie je eine Folge (a_n) mit den folgenden Eigenschaften an: 3/3/1
 - (a) (a_n) konvergiert gegen $\frac{1}{2}$,
 - (b) 3 ist Häufungspunkt von (a_n) aber nicht Grenzwert,
 - (c) (a_n) hat genau drei Häufungspunkte,
 - (d) 5 ist Grenzwert, und (a_n) ist nicht monoton,
 - (e) (a_n) ist nicht beschränkt, und 0 ist Häufungspunkt.
2. Beweisen Sie (ohne Benutzung des Satzes 3.10) die Konvergenz der Folge (a_n) 3/3/2
mit $a_n = \frac{5n+3}{3n+4}$.
3. Zeigen Sie: Zu jeder reellen Zahl a existiert eine Folge (r_n) rationaler Zahlen, 3/3/3
die gegen a konvergiert.
4. Zeigen Sie: Wenn $a_n \geq 0$ und $a_n \rightarrow a$, so $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$. 3/3/4
5. Zeigen Sie: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 3/3/5
6. Zeigen Sie: Für beschränkte Folgen (a_n) von reellen Zahlen sind die nachfolgenden Bedingungen äquivalent: 3/3/6
 - (a) (a_n) ist konvergent,
 - (b) (a_n) besitzt genau einen Häufungspunkt,
 - (c) $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.
7. Zeigen Sie, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ streng monoton fällt. 3/3/7
8. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte 3/3/8
von

(a) $\left(\frac{2^n}{n!}\right),$

(c) $\left(\frac{4n^3 + 2n^2 + 7}{7n^3 + n^2 + n - 1}\right),$

(e) $\left((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}\right),$

(b) $\left(\frac{n!}{k^n}\right), \quad k \geq 1,$

(d) $\left(\frac{n^3 + \sqrt{n^3 + 1}}{3n^2 + \sqrt{n^2 - 1}}\right),$

(f) $\left(\sqrt[n]{2n}\right).$
9. Zeigen Sie: Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, dann ist $(a_n \cdot b_n)$ eine 3/3/9
Nullfolge.
10. Prüfen Sie, ob die Folgen $(a_n), n \geq 1$, beschränkt sind: 3/3/10

$$(a) \quad a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (n \text{ Wurzeln}),$$

$$(b) \quad a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n + 1},$$

$$(c) \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n = 2k, \\ \frac{n^2}{n+2} & \text{für } n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

11. Prüfen Sie, ob die Folgen (a_n) , $n \geq 1$, monoton sind:

3/3/11

$$(a) \quad a_n = \frac{n^2 + 2n + 7}{n^2 + 2n + 8},$$

$$(b) \quad a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n},$$

$$(c) \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

$$(d) \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} & \text{für } n = 2k - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} & \text{für } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

12. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums die Konvergenz der Folgen:

3/3/12

$$(a) \quad \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right), \quad (b) \quad \left(\frac{n+b}{n} \right), \quad (c) \quad \left(\frac{1}{n^p} \right), \quad p \geq 1.$$

13. Geben Sie für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ entsprechend der Definition der Konvergenz von (a_n) ein a und ein geeignetes $n_0 = n_0(\varepsilon)$ an, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für:

3/3/13

$$(a) \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}, \quad (b) \quad a_n = \frac{2\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}}, \quad (c) \quad a_n = \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}.$$

14. Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für

3/3/14

$$(a) \quad a_n = \frac{9 + \frac{n}{n+1}}{2 + \frac{1}{n}}, \quad (b) \quad a_n = \frac{n}{3n+2}, \quad (c) \quad a_n = \frac{3 + 0,5^n}{0,3^{n+1} + 5}.$$

15. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

3/3/15

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{3n+1}, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2}.$$

16. Man finde die Grenzwerte von (a_n) und (b_n) , wobei a_n und b_n durch die folgenden Rekursionen definiert sind:

3/3/16

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}; \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2 - b_n}.$$

17. Zeigen Sie:

3/3/17

(a) Die Folge (a_n) mit den induktiv definierten Folgegliedern

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) \quad \text{für } n \geq 2$$

ist eine Cauchyfolge.

(b) Ist (a_n) induktiv definiert durch

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 3,$$

dann besitzt die Folge (a_n) den Grenzwert $\frac{2}{3}$.

[Hinweis: $a_n - \frac{2}{3} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3}$ für $n \geq 1$.]