

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \\ \int \cos x dx = \sin x + c & \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\ \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \\ \int e^x dx = e^x + c \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.19 (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

9/5/14

Ist f in $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f in $[a, b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

9.7 Uneigentliche Integrale

Definition. (*uneigentliches Integral über unendlichen Intervallen*)

9/7/1

Es sei a eine reelle Zahl, f sei für alle $x \geq a$ definiert und in $[a, x]$ integrierbar,

und es sei $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

f ist in $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ *uneigentlich integrierbar*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Der Limes heißt dann *uneigentliches Integral* von f in $[a, \infty)$.

$$\text{Bez.: } \int_a^\infty f(t) dt$$

Ist f in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Ist $|f|$ in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *absolut konvergent*.

Analog definiert man das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, a]$. Hierbei sei f für jedes $x \leq a$ definiert und in $[x, a]$ integrierbar.

Man betrachtet dann $F(x) := \int_x^a f(t) dt$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Beispiele.

(2). Wir betrachten jetzt die Funktion $f(t) = \frac{1}{t}$ und zeigen, daß das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ nicht konvergiert. Dies bedeutet anschaulich gesprochen, daß die „Fläche“, die von oben durch die Funktion und von unten durch die x -Achse in dem Intervall $[1, \infty)$ begrenzt wird, unendlich groß ist (vgl. Abb. 9.18).

9/7/3/2

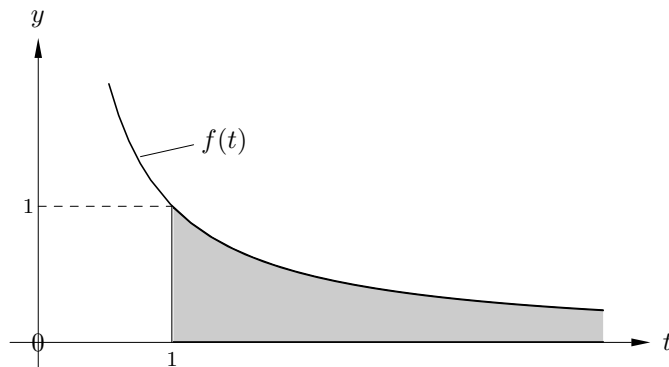


Abb. 9.18 Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ konvergiert nicht, denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \infty.$$

Es ist

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty;$$

d.h. der Limes existiert nicht.