

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

#### 2.3 Mengen von reellen Zahlen

**Definition.** (*Häufungspunkt*)

2/3/11

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ .

$a$  ist ein Häufungspunkt von  $M$

$\overline{\text{Df}}$  In jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegt wenigstens ein von  $a$  verschiedenes Element  
 ( $:=$  Punkt) aus  $M$ ,  
 (d.h., für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $x \in M$  mit  $x \neq a$  und  $x \in U_\varepsilon(a)$ ).

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.4 Potenzreihen

**Definition.** (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei  $(a_n)$  eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und  $a, x$  seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  *Potenzreihe* in  $x-a$  mit den *Koeffizienten*  $a_n$ .

**Definition.** (*Konvergenzradius*)

4/4/5

Es sei  $\varrho$  eine nicht-negative reelle Zahl oder  $\varrho = \infty$ .

$\varrho$  heißt *Konvergenzradius* von  $\sum a_n(x-a)^n$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x$  gilt: Wenn  $|x-a| < \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x-a)^n$  absolut konvergent,  
 und wenn  $|x-a| > \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x-a)^n$  divergent.

(Hierbei soll immer gelten:  $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$  bzw.  $= \mathbb{C}$  und  $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$ .)

**Bemerkung.** Die offene Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $\varrho$  (bzw. das offene Intervall in  $\mathbb{R}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und der Länge  $2\varrho$ ) heißt *Konvergenzgebiet* oder *Konvergenzkreis* (bzw. *Konvergenzintervall*) und  $a$  heißt *Mittelpunkt der Potenzreihe*  $\sum a_n(x-a)^n$ .

4/4/12

Innerhalb dieser offenen Kreisscheibe (bzw. des offenen Intervalls) konvergiert die Potenzreihe absolut, außerhalb divergiert sie; auf dem Rande kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (man betrachte das Beispiel  $\sum \frac{x^n}{n}$  für  $x = \pm 1$ ).

#### 4.5 Rechnen mit Potenzreihen

**Satz 4.25** (*Identitätssatz für Potenzreihen*)

4/5/6

*Voraussetzungen:*

- (1) *Es seien  $\sum a_n(x-a)^n$  und  $\sum b_n(x-a)^n$  Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  und  $\varrho_1, \varrho_2 > 0$ .*
- (2)  *$(x_\nu)$  sei eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $\lim x_\nu = a$  und  $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$ .*
- (3) *Für jedes  $\nu \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n$ .*

*Behauptung: Für jedes  $n$  ist  $a_n = b_n$ .*

(D.h., stimmen zwei Potenzreihen in unendlich vielen Punkten  $x_\nu$  überein und ist der Mittelpunkt  $a$  der Potenzreihen wenigstens ein Häufungspunkt dieser Menge, dann stimmen die Reihen schon koeffizientenweise überein, sie sind also identisch.)