

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.2 Sei $a \in D(f)$ und a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann gilt: 5/2/12
 f ist in a stetig gdw $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition des Grenzwertes. □ 5/2/13

Satz 5.3 (Folgenstetigkeit) 5/2/14

Es sei $a \in D(f)$. Dann gilt:
 f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:
Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Beweis. (\longrightarrow) Sei f in a stetig. Nach Definition erhält man: 5/2/15
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow a$. Dann ist $|x_n - a| < \delta$ für fast alle n , und somit gilt auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für fast alle n .

Also $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

(\longleftarrow) Annahme, f ist in a nicht stetig.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D(f)$ existiert mit $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Wählt man $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, dann gibt es für jedes n ein $x_n \in D(f)$ mit

$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, also

$x_n \rightarrow a$ aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$,

d.h., $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ ✗! □

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.19 Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ bzw. von $D_l(f, a)$. Dann gilt: 6/3/50

f ist in a rechtsseitig bzw. linksseitig stetig \iff

$a \in D(f)$ und f besitzt in a den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert $f(a)$

$\iff a \in D(f)$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_n \searrow a$ bzw. $x_n \nearrow a$, so $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Beweis. Die Beweise führt man völlig analog wie die zu den Sätzen 5.2 und 5.3, wo die Stetigkeit mit Hilfe des Grenzwertbegriffs charakterisiert wurde. Man schränkt sich hier lediglich auf die linksseitige bzw. rechtsseitige Umgebung des Punktes a ein. \square

6/3/51
