

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Satz 9.5 *Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien beliebige Zerlegungen von I . Dann gilt:* 9/2/6

$$(1) \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

$$(2) \quad (b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$$

$$(3) \quad \text{Ist } \mathfrak{z}' \text{ eine Verfeinerung von } \mathfrak{z}, \text{ dann gilt } \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

$$(4) \quad \text{Es ist stets } \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2).$$

Bemerkung. Nach (2) ist die Menge der Untersummen und die Menge der Obersummen stets beschränkt. Dies gibt Anlaß zu folgender Definition:

9/2/8