

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt integrierbar*), und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Wir werden jetzt mit Hilfe des bestimmten Integrals mit veränderlicher oberer Grenze neue Funktionen definieren. Dazu sei zunächst f eine in dem Intervall I definierte und beschränkte Funktion. Dann ist offenbar für jedes $x \in I$ die Funktion f in jedem Teilintervall $[a, x] \subseteq I$ bestimmt integrierbar. Damit ist jedem $x \in I$ durch $\int_a^x f(t) dt$ ein bestimmter Wert $F(x)$ zugeordnet, d.h., durch $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ist in I eine Funktion definiert. Wir leiten jetzt einige Eigenschaften dieser Funktion her.

9/5/8

9.7 Uneigentliche Integrale

Definition. (*uneigentliches Integral über unendlichen Intervallen*)

9/7/1

Es sei a eine reelle Zahl, f sei für alle $x \geq a$ definiert und in $[a, x]$ integrierbar, und es sei $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

f ist in $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ *uneigentlich integrierbar*

$\overline{\text{Def}}$ Es existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Der Limes heißt dann *uneigentliches Integral* von f in $[a, \infty)$.

$$\text{Bez.: } \int_a^\infty f(t) dt$$

Ist f in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Ist $|f|$ in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann heißt $\int_a^\infty f(t) dt$ *absolut konvergent*.

Analog definiert man das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, a]$. Hierbei sei f für jedes $x \leq a$ definiert und in $[x, a]$ integrierbar.

Man betrachtet dann $F(x) := \int_x^a f(t) dt$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.