

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Bemerkung. Aus der Definition und den Eigenschaften von \sin und \cos erhält man sofort die wichtigsten Eigenschaften von \tan und \cot . Insbesondere gilt:

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}, \quad W(\tan) = \mathbb{R};$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\}, \quad W(\cot) = \mathbb{R}.$$

\tan und \cot sind als Quotienten von stetigen Funktionen wieder stetig;

\tan und \cot sind wie \sin und \cos periodisch, allerdings mit der Periode π .

Ähnlich wie \sin und \cos lassen sich auch \tan und \cot am Einheitskreis geometrisch interpretieren (vgl. Abb 5.21 und 5.24).

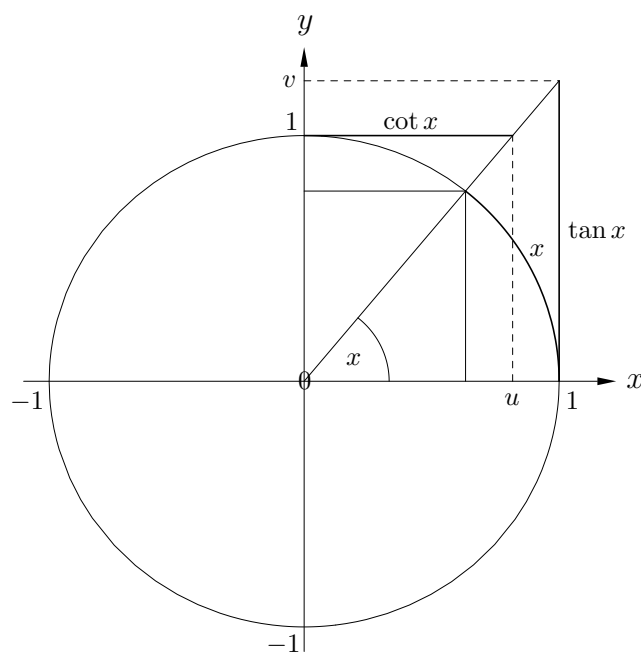


Abb. 5.24 In der Abbildung ist zu erkennen, wie am Einheitskreis die Funktionen \tan und \cot in Abhängigkeit von dem Winkel x (alle hervorgehoben durch dickere Strichstärke; x gemessen in Bogenmaß) veranschaulicht werden können. \cot bzw. \tan sind dann definiert durch: $\cot x := u$, $\tan x := v$.

Die trigonometrischen Funktionen \sin , \cos , \tan , \cot sind als periodische Funktionen **nicht** in ihren gesamten Definitionsbereichen injektiv. In den (maximalen) Teilintervallen, in denen sie jedoch injektiv sind (dort sind sie auch stetig und daher streng monoton), besitzen sie Umkehrfunktionen (die sog. *Arcus-Funktionen*; Arcus oder Arkus := Bogenmaß eines Winkels), die der Reihe nach mit \arcsin , \arccos , \arctan , arccot bezeichnet werden.

Zur Veranschaulichung der Arcus-Funktionen betrachte man zunächst die Abb. 5.21. Dort ist der Winkel x in Bogenmaß gegeben (das ist bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten $(1,0)$ und (u,v) im entgegengesetzten Uhrzeigersinn). Für fixiertes x ist $\sin x$ symbolisiert durch die Strecke der Länge v zwischen den Punkten $(u,0)$ und (u,v) . Also

$$\sin x = v \implies \arcsin(\sin x) = \arcsin v = x \quad (:= \text{die zu } \sin x \text{ gehörende Bogenlänge}).$$

Das Analoge gilt für Cosinus, Tangens und Cotangens.

Abschließend werden noch die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen (in geeigneten Intervallen) dargestellt (vgl. Abb. 5.25 – 5.28). Sinus wird in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ und in $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ betrachtet, Cosinus in $[0, \pi]$ und in $[\pi, 2\pi]$. Tangens und Cotangens werden in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bzw. in $[0, \pi]$ dargestellt.

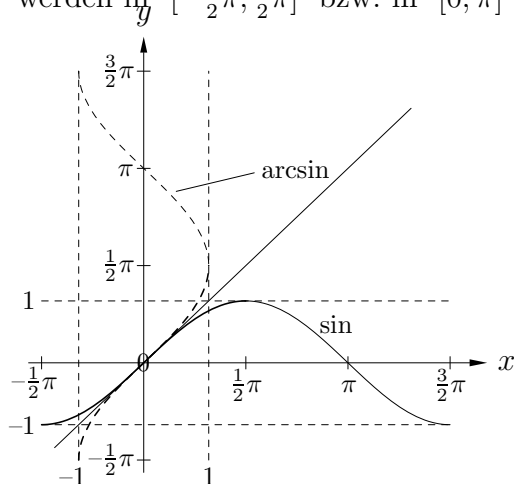


Abb. 5.25 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Sinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Sinus injektiv ist.

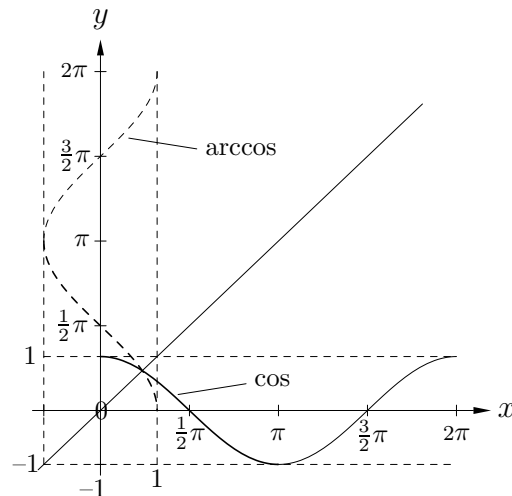


Abb. 5.26 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Cosinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Cosinus injektiv ist.

Analog wie in den vorhergehenden Abbildungen verfahren wir jetzt noch mit Tangens und Cotangens.

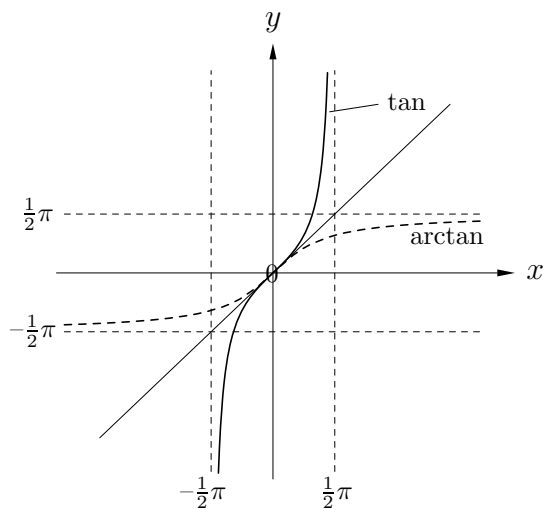


Abb. 5.27 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Tangens in dem Intervall $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

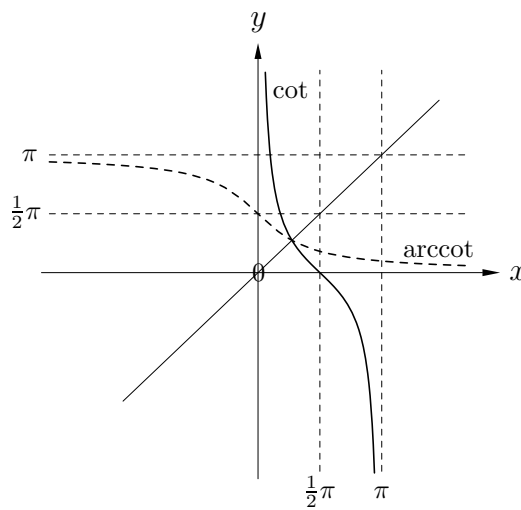


Abb. 5.28 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Cotangens in dem Intervall $(0, \pi)$.

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren. 9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \\ \int \cos x dx = \sin x + c & \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\ \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \\ \int e^x dx = e^x + c \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

9.7 Uneigentliche Integrale

Definition. f ist in $(-\infty, \infty)$ *uneigentlich integrierbar* 9/7/2

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß f in $(-\infty, a]$ und in $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \stackrel{\text{Df}}{=} \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{\infty} f(t) dt$ heißt *uneigentliches Integral* von f in $(-\infty, \infty)$.

Beispiele.

(1). Es sei $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

9/7/3/1

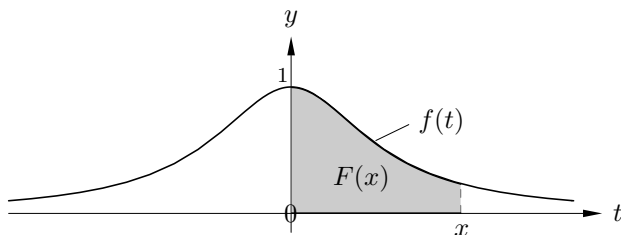


Abb. 9.17 a Der Flächeninhalt der schattierten Fläche ist durch das bestimmte Integral $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ gegeben.

Für $x \rightarrow \infty$ entsteht das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t) dt$.

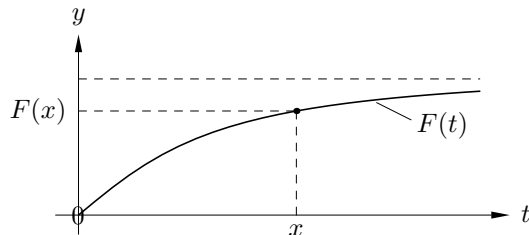


Abb. 9.17 b Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist $F(x) = \arctan x$ eine Stammfunktion von f , folglich gibt $F(x)$ den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^x f(t) dt$ (Inhalt der schattierten Fläche aus Abb. 9.17 a) an.

Gesucht ist das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, \infty)$.

Es ist $\int_{-\infty}^\infty f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^\infty f(t) dt$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^x \\ &= \arctan x - \underbrace{\arctan 0}_{=0} = \arctan x. \end{aligned}$$

Damit gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. Also

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Analog ist

$$G(x) = \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} dt = \arctan 0 - \arctan x = -\arctan x$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\arctan x) = -(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und somit} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Bemerkung. $\arctan x$ könnte auch durch $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ definiert werden.

Interpretiert man das uneigentliche Integral als Fläche, dann schließt die Funktion

$f(x) = \frac{1}{1+t^2}$ mit der x -Achse in dem unendlichen Intervall $(-\infty, \infty)$ eine „endliche“ Fläche ein.