

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 7.23 (*Differentiation einer Potenzreihe*)

7/4/3

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine (reelle) Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$.
Dann gilt:

$$(1) \quad f \text{ ist in } (a - \varrho, a + \varrho) \text{ differenzierbar und } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

(f kann gliedweise differenziert werden)

$$(2) \quad \text{Der Konvergenzradius von } \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \text{ ist ebenfalls } \varrho.$$

Korollar. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist f in $(a - \varrho, a + \varrho)$ beliebig oft differenzierbar, und es ist

7/4/5

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-a)^m \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n (x-a)^{n-k} \\ &= k! \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (x-a)^{n-k} = k! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} (x-a)^m. \end{aligned}$$

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 7

- Differentiation einer Potenzreihe (Satz 7.23 + Korollar).

7/6/14