

## Kapitel 1

### Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

#### Induktionsaxiom:

Es sei  $E$  eine Eigenschaft für natürliche Zahlen  $n$ . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage  $\forall m E(m)$  zu beweisen, genügt es:

1.  $E(0)$  zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2.  $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$  nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und zeigt:

Wenn  $E(n)$ , so  $E(n+1)$ .

$E(n)$  heißt *Induktionsvoraussetzung*,  $E(n+1)$  *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a):  $E(n)$  ist falsch.

Dann ist die Implikation  $E(n) \rightarrow E(n+1)$  aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b):  $E(n)$  ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von  $E(n+1)$  zu zeigen.

**Achtung:** Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges  $n$  wird vorausgesetzt, daß  $E(n)$  schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

#### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

(0)  $0 < 1$ .

(1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)

(2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)

(3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)

**Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome für die irreflexive Ordnung*.

- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .  
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,  
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,  
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .
- (9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .
- (10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,  
Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .
- (11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .
- (12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

## 2.3 Mengen von reellen Zahlen

**Definition.** (Schranke)

2/3/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \neq \emptyset$ .

- (1)  $a \in \mathbb{R}$  ist eine *obere Schranke* von  $M$   
 $\overline{\text{Df}} \quad x \leq a$  für jedes  $x \in M$ .
- (2)  $a \in \mathbb{R}$  ist eine *untere Schranke* von  $M$   
 $\overline{\text{Df}} \quad a \leq x$  für jedes  $x \in M$ .
- (3)  $M$  ist *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*  
 $\overline{\text{Df}} \quad M$  besitzt eine obere (bzw. untere) Schranke.
- (4)  $M$  ist *beschränkt*  
 $\overline{\text{Df}} \quad M$  ist nach oben und nach unten beschränkt.

**Definition.** (*Grenze*)

2/3/2

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \neq \emptyset$ .

- (1) Sei  $M$  nach oben beschränkt.  $a$  ist *obere Grenze* von  $M$

$\stackrel{\text{Df}}{=} a$  ist die kleinste obere Schranke von  $M$ .

**Bez.:**  $a = \sup M$  (*Supremum* von  $M$ ).

- (2) Sei  $M$  nach unten beschränkt.  $a$  ist *untere Grenze* von  $M$

$\stackrel{\text{Df}}{=} a$  ist die größte untere Schranke von  $M$ .

**Bez.:**  $a = \inf M$  (*Infimum* von  $M$ ).

**Satz 2.8**

2/3/4

- (1) Jede nicht leere und nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere Grenze.
- (2) Jede nicht leere und nach unten beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine untere Grenze.
- (3) Jede nicht leere und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere und eine untere Grenze.

**Bemerkung.** Teil (1) des Satzes heißt: *Satz von der oberen Grenze*. Er hat grundlegende Bedeutung für die Analysis. (1) ist unter anderem auch äquivalent zum Intervallschachtelungsaxiom, d.h., man kann anstelle von Axiom IV für die reellen Zahlen auch den Satz von der oberen Grenze wählen.

2/3/5

**Beweis.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \neq \emptyset$ .

2/3/6

(1). Es sei  $a \in M$  und  $b$  eine obere Schranke von  $M$ . Wenn  $M$  überhaupt eine obere Grenze besitzt, dann muß sie schon in dem Intervall  $[a, b]$  liegen. Denn ist  $c < a$ , dann ist  $c$  keine obere Schranke von  $M$  und damit erst recht keine obere Grenze. Ist  $b < c$ , dann ist  $c$  nicht die kleinste obere Schranke von  $M$ . Wir brauchen also nur in dem Intervall  $[a, b]$  nach einer oberen Grenze von  $M$  zu suchen, und dies geschieht mit Hilfe einer Intervallschachtelung.

Wir konstruieren eine Intervallfolge  $([a_n, b_n])$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ ,
- $b_n$  ist eine obere Schranke von  $M$ ,
- für jedes  $n$  existiert ein  $x \in M$  mit  $a_n \leq x$ ,
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ .

Wir starten mit

$$a_0 = a, \quad b_0 = b.$$

Es sei  $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ . Für  $c_1$  sind zwei Fälle möglich, nämlich:

- (a)  $c_1$  ist eine obere Schranke von  $M$  oder
- (b)  $c_1$  ist keine obere Schranke von  $M$ . Dann existiert ein  $x \in M$ , so daß  $c_1 < x$ .

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir das Intervall  $[a_1, b_1]$ .

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_1, \quad \text{falls } c_1 \text{ eine obere Schranke von } M \text{ ist,}$$

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = b_0, \quad \text{falls } c_1 \text{ keine obere Schranke von } M \text{ ist.}$$

Damit gilt stets  $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$  und  $b_1$  ist eine obere Schranke von  $M$ .

Weiterhin gibt es ein  $x \in M$  mit  $a_1 \leq x$ , und schließlich ist  $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$ .

**Bemerkung.** Die Definition des Intervalls  $[a_1, b_1]$  hätte man sich ersparen können, da  $[a_1, b_1]$  als Spezialfall von  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  auftritt. Nur des besseren Verständnisses wegen ist dieser Fall hier diskutiert worden.

Seien nun (entsprechend der Induktionsvoraussetzung)  $a_n$  und  $b_n$  schon mit den geforderten Eigenschaften definiert.

$$\text{Es sei } c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Analog wie im ersten Schritt können für  $c_{n+1}$  wieder zwei Fälle eintreten:

- (a)  $c_{n+1}$  ist eine obere Schranke von  $M$  oder
- (b)  $c_{n+1}$  ist keine obere Schranke von  $M$ .

Entsprechend dieser Fälle definieren wir:

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } c_{n+1} \text{ eine obere Schranke von } M \text{ ist,}$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls } c_{n+1} \text{ keine obere Schranke von } M \text{ ist.}$$

Man überprüft leicht, daß  $([a_n, b_n])$  eine Intervallschachtelung mit den gewünschten Eigenschaften ist.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Behauptung 1:  $c$  ist eine obere Schranke von  $M$ .

Es ist zu zeigen: Für jedes  $x \in M$  gilt:  $x \leq c$ .

Annahme:  $c$  ist keine obere Schranke von  $M$ .

Dann existiert ein  $x \in M$  mit  $c < x$ . Da  $b_n$  nach Definition eine obere Schranke von  $M$  ist, gilt:  $a_n \leq c < x \leq b_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

Es ist  $\underbrace{x - c}_{:= d} > 0$ , und wegen  $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$  erhält man  $b_n - a_n < d$  für hinreichend große  $n$ .

Dies liefert einen Widerspruch.

Behauptung 2:  $c$  ist die kleinste obere Schranke (also obere Grenze) von  $M$ .

Annahme:  $c$  ist nicht die kleinste obere Schranke von  $M$ .

Dann gibt es eine kleinere obere Schranke  $d$  von  $M$ , also  $d < c$ , und  $d$  ist ebenfalls eine obere Schranke von  $M$ .

Nach Voraussetzung existiert für  $a_n$  ein  $x \in M$ , so daß  $a_n \leq x$ . Wegen  $x \leq d$  gilt insgesamt

$$a_n \leq x \leq d < c \leq b_n.$$

Analog wie beim Beweis von Behauptung 1 erhält man einen Widerspruch.

Folglich ist  $c$  obere Grenze von  $M$ .

(2) bleibt als Übungsaufgabe.

**Hinweis:** Sei  $M \neq \emptyset$  und  $M$  nach unten beschränkt.

Man bilde  $M^- = \{-x : x \in M\}$ .

g.z.z.:  $M$  ist nach unten beschränkt gdw  $M^-$  nach oben beschränkt ist, und

$c$  ist obere Grenze von  $M^-$  gdw  $-c$  untere Grenze von  $M$  ist.

Es läßt sich auch zeigen, daß die Eigenschaften (1) und (2) äquivalent sind.

(3). Zusammenfassung von (1) und (2).  $\square$