

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.11 (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f in I $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes $x \in I$ ein $\vartheta (= \vartheta(x))$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

($R_n(x)$ heißt Lagrange'sches Restglied, $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ heißt Taylorpolynom, wobei $f^{(0)}(x) := f(x)$, und $f(x) = p(x) + R_n(x)$ heißt Taylorsche Formel.)

Übungsaufgaben

19. Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes:

7/5/19

- (a) $\cos \frac{1}{10}$, so daß der Fehler $\leq 10^{-6}$ wird,
- (b) $\ln 2$, so daß der Fehler $\leq 10^{-1}$ wird,
- (c) $e^{\frac{1}{100}}$, so daß der Fehler $\leq 10^{-6}$ wird.

(Hinweis: Man betrachte bei Aufgabe (b) die Funktion $\ln(1+x)$.)