

# Kapitel 9

## Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (Zerlegung)

9/2/1

$\mathfrak{z}$  ist eine Zerlegung (oder Partition) von  $I$

$\overline{\text{Df}}$   $\mathfrak{z}$  ist eine endliche Folge  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  von reellen Zahlen  $a_0, \dots, a_{n+1}$ , so daß  
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$ .

Die Elemente  $a_0, \dots, a_{n+1}$  heißen dann *Unterteilungspunkte* von  $\mathfrak{z}$ ,

9/2/2

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$  bezeichne das  $i$ -te Teilintervall bezüglich  $\mathfrak{z}$ , und

$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$  heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitmaß*, ...) von  $\mathfrak{z}$ .

**Definition.** (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

(1)  $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Untersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2)  $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Obersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

**Definition.** (Unterintegral, Oberintegral, Integral)

9/2/9

Es sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von  $f$  in  $I$ , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.:} \quad \int_{\frac{a}{b}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{a}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von  $f$  in  $I$  gleich, dann heißt  $f$  in  $I$  (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes* (*Riemann-*) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von  $f$  in  $I$ .

$$\text{Bez.:} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

**Satz 9.6** Ist  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt, dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß für jede Zerlegung  $\mathfrak{z}$  von  $I$  mit  $d(\mathfrak{z}) < \delta$  gilt: 9/2/13

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$(2) \quad 0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$