

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

Definition. (*Folge*)

3/0/1

F ist eine *Folge* (von reellen Zahlen)

$\overline{\text{Df}}$ F ist eine Abbildung von \mathbb{N} in \mathbb{R} ,

d.h., jeder natürlichen Zahl n wird eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so daß $F(n) = a_n$.

Bez.: $F = (a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ oder einfach $F = (a_n)$.

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Satz 5.3 (*Folgenstetigkeit*)

5/2/14

Es sei $a \in D(f)$. Dann gilt:

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Beweis. (\longrightarrow) Sei f in a stetig. Nach Definition erhält man:

5/2/15

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow a$. Dann ist $|x_n - a| < \delta$ für fast alle n , und somit gilt auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für fast alle n .

Also $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

(\leftarrow) Annahme, f ist in a nicht stetig.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D(f)$ existiert mit $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Wählt man $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, dann gibt es für jedes n ein $x_n \in D(f)$ mit

$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, also

$$x_n \rightarrow a \quad \text{aber} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon,$$

d.h., $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ **!** \square