

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Teilmengenbeziehung oder Inklusion

1/0/3

$M \subseteq N \stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } x \text{ gilt: wenn } x \in M, \text{ so } x \in N. \quad (\text{Inklusion})$

$M \subset N \stackrel{\text{Df}}{=} M \subseteq N \text{ und } M \neq N, \quad (\text{echte Inklusion})$

d.h., $M \subseteq N$ und es gibt ein x , so daß $x \in N$, und $x \notin M$.

Will man aus einer gegebenen Menge M die Teilmenge der Elemente x mit einer bestimmten Eigenschaft – etwa $E(x)$ – aussondern, dann kennzeichnen wir dies durch

$$\{x \in M : E(x)\}.$$

Potenzmenge

1/0/8

$\text{Pot}(M) \stackrel{\text{Df}}{=} \{X : X \subseteq M\}. \quad (\text{Menge aller Teilmengen von } M)$

Aus Bequemlichkeitsgründen soll auch die „Zusammenfassung“ von Objekten, die gar kein Element enthält, als Menge bezeichnet werden, und zwar als

Definition. (*Durchschnitt und Vereinigung von Mengensystemen*)

1/0/10

(1) $\bigcap M$ heißt *Durchschnitt von* M

$\stackrel{\text{Df}}{=} \bigcap M = \{x : \text{für jedes } X \in M \text{ ist } x \in X\}.$

$$\text{Bez.: } \bigcap M = \bigcap_{X \in M} X$$

(2) $\bigcup M$ heißt *Vereinigung von* M

$\stackrel{\text{Df}}{=} \bigcup M = \{x : \text{es existiert ein } X \in M, \text{ so daß } x \in X\}.$

$$\text{Bez.: } \bigcup M = \bigcup_{X \in M} X$$

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*offene Menge*)

6/1/14

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M heißt *offen* (in \mathbb{M})

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0, \text{ so daß } U_\varepsilon(a) \subseteq M.$

(Mit jedem $a \in M$ gehört noch eine ganze ε -Umgebung zu M , vgl. auch Abb. 6.2.)

Satz 6.6 *In metrischen Räumen gilt:*

6/1/29

- (1) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*
- (2) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*
- (3) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
- (4) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Definition. (*Überdeckung*)

6/5/1

Es sei (\mathbb{M}, ϱ) ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{M}$.

Weiterhin sei \mathcal{U} ein System von (offenen) Teilmengen von \mathbb{M} (also $\mathcal{U} \subseteq \text{Pot}(\mathbb{M})$).

- (1) \mathcal{U} ist eine (*offene*) *Überdeckung* von M

$\overline{\text{Df}}$ Zu jedem $a \in M$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$, so daß $a \in U$.

(Die Mengen aus \mathcal{U} überdecken die Menge M).

- (2) \mathcal{U} ist eine *endliche Überdeckung* von M

$\overline{\text{Df}}$ \mathcal{U} ist eine Überdeckung von M , und \mathcal{U} enthält nur endlich viele Mengen.