

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

##### Satz 7.2 (Summenregel)

7/1/15

Sind  $f, g$  in  $a$  differenzierbar, dann ist  $f + g$  in  $a$  differenzierbar, und es ist  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$  (oder kurz  $(f + g)' = f' + g'$ ).

##### Satz 7.3 (Produktregel)

7/1/17

Sind  $f, g$  in  $a$  differenzierbar, dann ist  $f \cdot g$  in  $a$  differenzierbar, und es ist  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$  (oder kurz  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ ).

##### Korollar. (Quotientenregel)

7/1/21

Sind  $f, g$  in  $a$  differenzierbar und ist  $g(a) \neq 0$ , dann ist  $\frac{f}{g}$  in  $a$  differenzierbar, und es ist  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$  (oder kurz  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ).

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

##### Definition. (partielle Ableitung)

8/1/4

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  und  $f$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  definiert.  $f$  ist in  $\bar{c}$  partiell nach  $x_i$  differenzierbar ( $i = 1, \dots, n$ )

$\overline{\text{Def}}$  Die Funktion  $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$  ist (als Funktion der einen Veränderlichen  $x_i$ ) an der Stelle  $c_i$  differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $\bar{c}$  (oder kurz: in  $\bar{c}$ ).

**Bez.:**  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$

**Satz 8.6** (*Differentiation rationaler Funktionen*)

8/1/28

Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f, g$  in  $\bar{c}$  differenzierbar. Dann gilt:

- (1)  $f \pm g$  und  $f \cdot g$  sind in  $\bar{c}$  differenzierbar, und es ist
- $$(f \pm g)'(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \pm g'(\bar{c}) \quad \left( \implies d(f \pm g) = df \pm dg \right),$$
- $$(f \cdot g)'(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot g(\bar{c}) + f(\bar{c}) \cdot g'(\bar{c}) \quad \left( \implies d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg \right).$$
- (2) Ist  $g(\bar{x}) \neq 0$  für jedes  $\bar{x}$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$ , dann ist  $\frac{f}{g}$  in  $\bar{c}$  differenzierbar, und es ist
- $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{c}) = \frac{f'(\bar{c}) \cdot g(\bar{c}) - f(\bar{c}) \cdot g'(\bar{c})}{g^2(\bar{c})} \quad \left( \implies d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2} \right).$$

**Beweis.** Den Beweis führt man ähnlich wie für Funktionen einer reellen Veränderlichen; man hat hier lediglich alle Beweisschritte für die partiellen Ableitungen vorzunehmen.

8/1/29

□