

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Am Ende von Kapitel 3 haben wir bereits Funktionenfolgen und ihre Konvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz definiert, ohne damit irgendwelche Anwendungen zu verbinden. Bevor wir dies tun, sollen zunächst noch Funktionenreihen definiert werden. 5/4/0

**Definition.** (*Funktionenreihe*) 5/4/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind, und es sei  $F_n := \sum_{i=0}^n f_i$  (die  $F_n$  sind also ebenfalls in  $M$  definierte Funktionen).

(1) Die Folge  $(F_n)$  heißt *Funktionenreihe*.

**Bez.:**  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  bzw.  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$  oder einfach  $\sum f_i$  bzw.  $\sum f_i(x)$

(2)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  *konvergent* (bzw. *gleichmäßig konvergent*) gegen  $f$   
 $\stackrel{\text{Df}}{=} (F_n)$  ist in  $M$  konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen  $f$ .

(3)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  *absolut konvergent* gegen  $f$   
 $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$  ist in  $M$  konvergent gegen  $f$ .

**Bemerkung.** Funktionenreihen sind also spezielle Funktionenfolgen. Alles, was über Funktionenfolgen ausgesagt wird, trifft sinngemäß auch auf Funktionenreihen zu. Potenzreihen sind offenbar spezielle Funktionenreihen. 5/4/2

Wir befassen uns zunächst mit einigen wichtigen Konvergenzkriterien für Funktionenfolgen und -reihen.

**Satz 5.18** (*Cauchysches Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz*) 5/4/3

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind.

(1)  $(f_n)$  ist in  $M$  *gleichmäßig konvergent* gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß für alle  $m, n \geq n_0$  und alle  $x \in M$  gilt:  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ .

(2)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  *gleichmäßig konvergent* gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert,

so daß für alle  $m, n \geq n_0$  und alle  $x \in M$  gilt:  $\left| \sum_{i=0}^m f_i(x) - \sum_{i=0}^n f_i(x) \right| < \varepsilon$

( $\iff \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \right| < \varepsilon$ , falls  $m > n$  und  $m = n + k$ ).

**Beweis.** (1). ( $\longrightarrow$ ) Sei  $(f_n)$  in  $M$  gleichmäßig konvergent gegen  $f$  und  $\varepsilon > 0$ . 5/4/4  
Nach Definition existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $m, n \geq n_0$  und für jedes  $x \in M$  gilt:

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man die Behauptung.

( $\longleftarrow$ ) Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen mit konstanten Gliedern konvergiert die Zahlenfolge  $(f_n(x))$  für jedes fixierte  $x \in M$  gegen einen Grenzwert, der mit  $f(x)$  bezeichnet wird.  $f$  ist damit eine in  $M$  definierte Funktion.

Wir haben zu zeigen, daß  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Dazu sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Nach Voraussetzung gibt es ein  $n_0$ , so daß für jedes  $m, n \geq n_0$  gilt:  $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sei  $x$  beliebig aber fest. Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{|f_m(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) - f_n(x) \right| = |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(2) erhält man leicht mit Hilfe von (1).  $\square$

**Satz 5.19** (*Majorantenkriterium für Funktionenreihen*) 5/4/5

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind, und es seien  $c_n$  reelle Zahlen.

Ist  $|f_n(x)| \leq c_n$  für fast alle  $n$  und alle  $x \in M$ , und ist  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergent, dann

ist  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  gleichmäßig und absolut konvergent in  $M$ .

**Beweis.** (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums.) 5/4/6

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} c_i < \varepsilon$$

für hinreichend große  $n$ . Folglich ist die Funktionenreihe gleichmäßig konvergent. Die absolute Konvergenz erhält man sofort aus dem Majorantenkriterium für Reihen mit konstanten Gliedern.  $\square$

**Beispiel.** Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent, dann sind nach dem obigen Satz die Funktionenreihen 5/4/7

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{mit} \quad f_n(x) = a_n \cdot \sin(nx) \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \quad \text{mit} \quad g_n(x) = a_n \cdot \cos(nx)$$

in  $\mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent.

**Satz 5.20** (Reelle) Potenzreihen konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzbereiches gleichmäßig. 5/4/8

**Beweis.** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho > 0$  und 5/4/9  
 $\varrho_1 < \varrho$ . Für  $|x-a| \leq \varrho_1 < \varrho$  ist  $\sum a_n(x-a)^n$  absolut konvergent. Folglich ist  $\sum |a_n| \varrho_1^n$  konvergent. Mit Hilfe des Majorantenkriteriums für Funktionenreihen erhält man sofort die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.21** (Stetigkeit der Grenzfunktion) 5/4/10

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine in  $M$  definierte Funktionenfolge, und alle  $f_n$  seien in  $a$  bzw. in ganz  $M$  stetig.

- (1) Konvergiert  $(f_n)$  in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$ , dann ist  $f$  in  $a$  bzw. in  $M$  stetig.
- (2) Konvergiert  $\sum f_n$  in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$ , dann ist  $f$  in  $a$  bzw. in  $M$  stetig.

**Beweis.** (1). Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  und für jedes  $x \in M$  gilt: 5/4/11

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen der Stetigkeit von  $f_n$  existiert ein  $\delta_n > 0$ , so daß für jedes  $x \in M$  gilt:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta_n, \text{ so } |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für  $|x-a| < \delta_n$  und  $n \geq n_0$  erhält man daraus:

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{:= (\star) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{:= (\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{:= (\star\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

$((\star), (\star\star\star)) < \frac{\varepsilon}{3}$  folgen aus der gleichmäßigen Konvergenz und  $(\star\star) < \frac{\varepsilon}{3}$  aus der Stetigkeit der  $f_n$ .

(2) folgt sofort aus (1), denn mit  $f_0, \dots, f_n$  ist auch  $F_n := \sum_{i=0}^n f_i$  stetig.  $\square$

**Korollar.** (Reelle) Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzintervalls stetig. 5/4/12

**Beweis.** Die Behauptung folgt unmittelbar aus der gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen und der Stetigkeit der Grenzfunktion.  $\square$  5/4/13

**Bemerkung.** 5/4/14

Aus dem letzten Satz und dem zugehörigen Korollar erhält man weiterhin:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

(Vertauschbarkeit zweier Limites bei gleichmäßig konvergenten Folgen)

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) .$$

(Vertauschbarkeit des Limes mit der unendlichen Summe bei gleichmäßig konvergenten Reihen)

(3) Durch Potenzreihen definierte Funktionen sind im Inneren ihres Definitionsbereiches stetig.

(4) Das Beispiel 5/4/7 zeigt, daß Funktionenreihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \sin(nx) + b_n \cdot \cos(nx))$$

stetige Funktionen definieren, wenn  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergieren. Hieraus ergeben sich interessante und wichtige Möglichkeiten für die Darstellung weiterer nicht-elementarer Funktionen. Hiermit befaßt sich die Theorie der *Fourierreihen*, die wir jedoch nicht behandeln werden (siehe Literaturangabe [4], Teil II, Seite 109 – 116 oder [1], Teil 2, Seite 118 – 173).