

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).

f besitzt an der Stelle a den Grenzwert c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.15 (*Satz von Weierstraß*)

6/3/21

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \neq \emptyset$. Dann gilt:

Ist f in M stetig und M beschränkt und abgeschlossen, dann existieren Minimum und Maximum von f in M (d.h., es gibt Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in M$, so daß $f(\bar{a}) = \min f(M)$ und $f(\bar{b}) = \max f(M)$).

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Beweis.

7/2/1

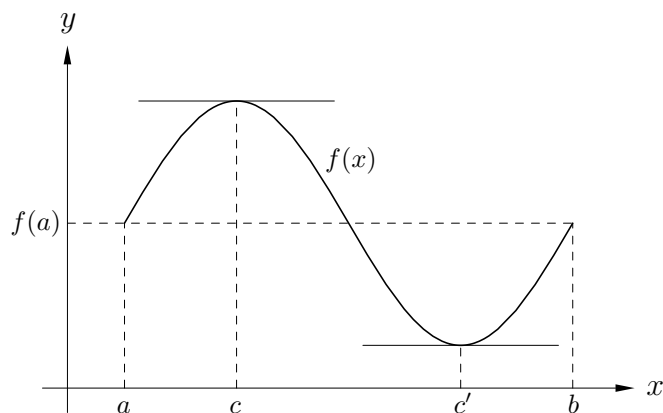


Abb. 7.6 An den Stellen c und c' besitzt die Funktion jeweils eine waagerechte Tangente.

Fall 1. f ist konstant. Dann ist $f'(c) = 0$ sogar für jedes $c \in (a, b)$.

Fall 2. f ist nicht konstant.

Da f in $[a, b]$ stetig ist, besitzt f dort ein Maximum und ein Minimum. Wenigstens eins von beiden wird im Inneren des Intervalls angenommen, da sonst f konstant ist. Es werde o.B.d.A. das Minimum an einer Stelle $c \in (a, b)$ angenommen, d.h., $f(x) \geq f(c)$ für jedes $x \in [a, b]$.

Behauptung: $f'(c) = 0$.

Nach Voraussetzung existiert

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c),$$

folglich existieren auch rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten und beide sind gleich $f'(c)$.

Für $x > c$, also $x - c > 0$, ist $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ und somit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0.$$

Es sei nun $x < c$. Folglich ist $x - c < 0$, also $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ und damit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0.$$

Insgesamt erhält man

$$0 \leq f'(c) \leq 0 \implies f'(c) = 0. \quad \square$$

Satz 7.9 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/2

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Beweis. Es ist $g(b) \neq g(a)$; anderenfalls gäbe es nach dem Satz von Rolle ein $c \in (a, b)$, so daß $g'(c) = 0$ ~~!~~

7/2/7

Ähnlich wie im Beweis des 1. Mittelwertsatzes betrachten wir eine Hilfsfunktion

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Offensichtlich ist φ in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar (denn f und g haben diese Eigenschaften), und es ist

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a) \quad \text{und} \\ \varphi(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a). \end{aligned}$$

Also $\varphi(a) = \varphi(b)$. Folglich läßt sich auf φ der Satz von Rolle anwenden; d.h., es gibt ein $c \in (a, b)$ mit $\varphi'(c) = 0$.

Wir bilden die Ableitung von φ an der Stelle c :

$$\begin{aligned}\varphi'(c) = 0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) \implies \\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \square\end{aligned}$$

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Korollar 2. (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{\infty}{\infty}$ “)

7/3/4

Voraussetzung:

- (1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar.
- (2) Sei $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß g' in (a, b) stets positiv oder stets negativ ist.

7/3/5

Angenommen, es gibt Elemente $a' < b'$ in (a, b) , so daß $g'(a') < 0 < g'(b')$ (den Fall $g'(a') > 0 > g'(b')$ beweist man analog). Da g in (a, b) differenzierbar ist, ist g in $[a', b']$ stetig und besitzt dort ein Minimum und ein Maximum. Wenigstens eins von beiden liegt im Inneren der Intervalls. Sei c eine Extremstelle von g in (a', b') . Dann ist $g'(c) = 0$ (siehe Beweis des Satzes von Rolle). **M!**

Da g' in (a, b) das Vorzeichen nicht wechselt, ist g dort streng monoton (dies folgt sofort aus Satz 7.9). Wegen $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ ist g in (a, b) streng monoton fallend und in einer hinreichend kleinen rechtsseitigen Umgebung von a positiv.

Mit diesen Informationen beweisen wir nun die Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} := c$ ($c \in \mathbb{R}$). Folglich gibt es nach Definition des Limes ein $u \in (a, b)$, so daß

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in (a, u).$$

Wir wählen jetzt u so nahe bei a , daß g in $(a, u]$ positiv ist. Nach dem 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes x mit $a < x < u$ ein $\xi \in (x, u)$, so daß

$$\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dann gilt für jedes feste $u \in (a, b)$ und jedes $x \in (a, u)$:

$$\left| \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiterhin ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} - c = \frac{f(u) - c \cdot g(u)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right) \cdot \left(\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c\right). \quad (\star)$$

((\star) kann durch ausrechnen bewiesen werden.)

Wegen $a < x < u$ ist $0 < g(x) < g(u)$ und somit $0 < \frac{g(u)}{g(x)} < 1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| &\leq \left| \frac{f(u) - c \cdot g(u)}{g(x)} \right| + \underbrace{\left| 1 - \frac{g(u)}{g(x)} \right|}_{< 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \\ &< \frac{1}{g(x)} \cdot \underbrace{|f(u) - c \cdot g(u)|}_{:= d} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (u \text{ fest} \implies d \text{ konstant}) \\ &= \frac{d}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{1}{g(x)} = 0$. Folglich existiert ein δ mit $0 < \delta < u - a$, so daß für jedes $x \in (a, a + \delta)$ gilt: $\frac{d}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Hieraus folgt schließlich für alle $x \in (a, a + \delta)$:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \frac{d}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \implies \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \quad \square$$