

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=}$ (S_n) konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Satz 4.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen)

4/1/6

$\sum a_i$ ist konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $m, n > n_0$ gilt: $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Definition. (absolute Konvergenz)

4/1/15

$\sum a_i$ ist absolut konvergent $\stackrel{\text{Df}}{=}$ $\sum |a_i|$ ist konvergent.

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Definition. (unbedingte Konvergenz)

4/2/8

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion (oder auch *Permutation* von \mathbb{N}).

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ durch *Umordnung* aus $\sum a_n$ entstanden.

$\sum a_n$ heißt *unbedingt konvergent*

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Jede durch Umordnung aus $\sum a_n$ entstandene Reihe ist konvergent.

Satz 4.12 Eine absolut konvergente Reihe konvergiert unbedingt und zwar immer gegen denselben Wert.

4/2/9

(D.h., für absolut konvergente Reihen gilt das allgemeinste Kommutativgesetz.)

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, $\sum a_n = a$ und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Permutation von \mathbb{N} .

4/2/10

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ konvergiert gegen a .

z.z.: Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein n^* , so daß für jedes $n \geq n^*$ gilt: $|a_{f(0)} + \cdots + a_{f(n)} - a| < \varepsilon$.

Es sei

$$S_m = \sum_{n=0}^m a_n, \quad S'_m = \sum_{n=0}^m a_{f(n)} \quad \text{und} \quad S''_m = \sum_{n=0}^m |a_n|.$$

Nach Voraussetzung ist (S''_m) konvergent. Folglich gilt nach dem Cauchy-Kriterium: Es existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und jedes $k \geq 1$:

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da k beliebig ist, erhält man daraus für je endlich viele n_1, \dots, n_l , die sämtlich größer als n_0 sind:

$$|a_{n_1}| + \cdots + |a_{n_l}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Voraussetzung gilt weiterhin: Es existiert ein m_0 , so daß für jedes $n \geq m_0$:

$$|S_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $k_0 = \{n_0, m_0\}$. Da f eine Permutation von \mathbb{N} ist, kommen $0, 1, \dots, k_0$ unter den Elementen $f(0), f(1), f(2), \dots$ vor. Sei nun n^* so groß gewählt, daß $0, 1, \dots, k_0$ schon unter den Elementen $f(0), \dots, f(n^*)$ vorkommen.

g.z.z.: für $m \geq n^*$ gilt: $|S'_m - a| < \varepsilon$.

$$S'_m = a_{f(0)} + \cdots + a_{f(m)} = a_0 + \cdots + a_{k_0} + a_{f(i_1)} + \cdots + a_{f(i_l)};$$

wobei $\{f(i_1), \dots, f(i_l)\} = \{f(0), \dots, f(m)\} \setminus \{0, \dots, k_0\}$; insbesondere ist $f(i_j) > k_0$ für $j = 1, \dots, l$.

Dann ist

$$\begin{aligned} |S'_m - a| &= |a_0 + \cdots + a_{k_0} + a_{f(i_1)} + \cdots + a_{f(i_l)} - a| \\ &\leq |a_0 + \cdots + a_{k_0} - a| + |a_{f(i_1)} + \cdots + a_{f(i_l)}| \\ &\leq \underbrace{|S_{k_0} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{f(i_1)}| + \cdots + |a_{f(i_l)}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$