

# Kapitel 9

## Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

**Definition.** (Zerlegung)

9/2/1

$\mathfrak{z}$  ist eine *Zerlegung* (oder *Partition*) von  $I$

$\overline{\text{Df}}$   $\mathfrak{z}$  ist eine endliche Folge  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  von reellen Zahlen  $a_0, \dots, a_{n+1}$ , so daß  
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$ .

Die Elemente  $a_0, \dots, a_{n+1}$  heißen dann *Unterteilungspunkte* von  $\mathfrak{z}$ ,

9/2/2

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$  bezeichne das  $i$ -te Teilintervall bezüglich  $\mathfrak{z}$ , und

$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$  heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitmaß*, ...) von  $\mathfrak{z}$ .

**Definition.** (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt.

(1)  $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Untersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2)  $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$  heißt *Obersumme* von  $f$  in  $I$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

**Definition.** (Verfeinerung)

9/2/5

Es seien  $\mathfrak{z}$  und  $\mathfrak{z}'$  Zerlegungen von  $I$ .

$\mathfrak{z}'$  ist eine *Verfeinerung* von  $\mathfrak{z}$

$\overline{\text{Df}}$  Alle Unterteilungspunkte von  $\mathfrak{z}$  sind auch Unterteilungspunkte von  $\mathfrak{z}'$ .

**Satz 9.5** Es sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt und  $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$  seien beliebige Zerlegungen von  $I$ . Dann gilt:

9/2/6

$$(1) \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

$$(2) \quad (b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x).$$

$$(3) \quad \text{Ist } \mathfrak{z}' \text{ eine Verfeinerung von } \mathfrak{z}, \text{ dann gilt } \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

$$(4) \quad \text{Es ist stets } \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2).$$

**Beweis.** Es sei  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ .

(1). Wegen  $a_{i+1} - a_i > 0$  und  $\inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sup_{x \in I_i} f(x)$  gilt

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) = \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

(2). Für  $i = 0, \dots, n$  ist offenbar  $I_i \subseteq I$  und damit auch

$$\inf_{x \in I} f(x) \leq \inf_{x \in I_i} f(x) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in I} f(x) \geq \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} (b - a) \cdot \inf_{x \in I} f(x) &= \left( \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \right) \cdot \inf_{x \in I} f(x) \leq \left( \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \right) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \\ &= \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) = \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) \\ &\leq \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I} f(x) = (b - a) \cdot \sup_{x \in I} f(x). \end{aligned}$$

(3). Sei  $(a_0^i, \dots, a_{n_i+1}^i)$  die entsprechende Zerlegung von  $I_i$ , die durch die Verfeinerung  $\mathfrak{z}'$  von  $\mathfrak{z}$  erzeugt wird, und es sei  $I_{ij} = [a_j^i, a_{j+1}^i]$ .

Analog wie im Beweis von (2) erhält man:

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \leq \sum_{j=0}^{n_i} (a_{j+1}^i - a_j^i) \cdot \inf_{x \in I_{ij}} f(x) \quad (\star)$$

und

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) \geq \sum_{j=0}^{n_i} (a_{j+1}^i - a_j^i) \cdot \sup_{x \in I_{ij}} f(x). \quad (\star\star)$$

Addiert man die Ungleichungen  $(\star)$  bzw.  $(\star\star)$  bezüglich  $i$ , dann erhält man die gewünschte Behauptung.

(4). Es sei  $\mathfrak{z}'$  eine gemeinsame Verfeinerung von  $\mathfrak{z}_1$  und  $\mathfrak{z}_2$ , d.h., alle Unterteilungspunkte von  $\mathfrak{z}_1$  und von  $\mathfrak{z}_2$  sind auch Unterteilungspunkt von  $\mathfrak{z}'$ . Dann gilt

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}). \quad \square$$