

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

Um den Konvergenzbegriff möglichst anschaulich zu formulieren, sagen wir auch: 3/1/1  
 In jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen *fast alle* Folgeglieder  $a_n$ . „Fast alle“ bedeutet „alle, mit Ausnahme höchstens endlich vieler“.

**Beispiel.** (Definition der *Eulerschen Zahl*  $e$ )

3/1/35

Sei  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Behauptung:  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist  $(a_n)$  nach Satz 3.8 konvergent.)

z.z.: 1.  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$  und  
 2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  (denn alle  $a_n$  sind positiv).

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\ &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn} \end{aligned}$$

$$\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1 \iff (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)(n^2 + 2n + 1)$$

$$\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$ , und damit ist  $(a_n)$  streng monoton wachsend.

Zu 2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Offenbar ist  $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$  für jedes  $n$ .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge  $(b_n)$  streng monoton fällt.

g.z.z.:  $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$  (denn alle  $b_n$  sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für  $(a_n)$ , er wird als Übungsaufgabe gestellt.

Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \text{ für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist  $(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und  $(b_n)$  monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen  $e$  und  $e'$ , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung:  $e = e'$ .

Annahme:  $e \neq e'$ .

Dann ist  $\varepsilon := |e - e'| > 0$ , und folglich gilt für hinreichend große  $n$

$$\begin{aligned} |e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } \frac{12}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\varepsilon = |e - e'| < \varepsilon$  **!**

Also  $e = e'$ .

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.1 Konvergenz von Reihen

##### Satz 4.9 (Wurzelkriterium)

4/1/35

Es sei  $(a_i)$  eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ ,  
dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$  für alle  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

##### Satz 4.10 (Quotientenkriterium)

4/1/38

Es sei  $a_i \neq 0$  für jedes  $i$ . Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ ,  
dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$  für jedes  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

##### Beispiele.

4/1/41

1. Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$ ,  $a \neq 0$ , also  $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$ .

Hier bietet sich das Wurzelkriterium an. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a}{n}\right|^n} = \left|\frac{a}{n}\right| \leq q < 1$$

für fast alle  $n$ ; z.B.  $q = \frac{1}{2}$  leistet das Verlangte.

Benutzt man für dasselbe Beispiel das Quotientenkriterium, dann wird die Berechnung komplizierter. Es ist (vgl. auch Beispiel 3/1/35)

$$\left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n}{n^n}} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \right| \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = |a| \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} := (\star).$$

Wir wissen schon, daß  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ , also  $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2}$ , folglich ist

$$(\star) \leq |a| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \leq q < 1 \text{ für fast alle } n \text{ (z.B. für } q = \frac{1}{2}\text{)}.$$