

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

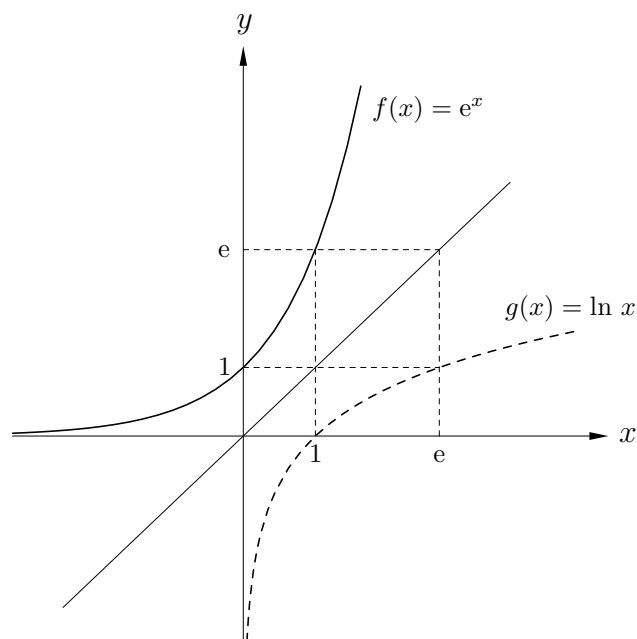
Satz 5.11 Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3) $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, und
für $x > 0$ ist $1 < \exp(x)$.
- (4) \exp ist streng monoton wachsend
(folglich ist \exp injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5) $\exp(1) = e$ ($e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).
- (6) Für rationale $x = \pm \frac{m}{n}$ ist $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$
(für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).
- (7) \exp ist stetig.

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $e^x \stackrel{\text{Df}}{=} \exp(x)$.

5/3/22



5/3/26

Abb. 5.18 Das Bild zeigt die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und den natürlichen Logarithmus $g(x) = \ln x$. Hier ist zu erkennen, daß $D(e^x) = W(\ln x)$ und $D(\ln x) = W(e^x)$. Weiterhin wird deutlich, daß $f(0) = e^0 = 1$, $f(1) = e^1 = e$ und $g(1) = \ln 1 = 0$, $g(e) = \ln e = 1$.

Logarithmusfunktion

Aufgrund der strengen Monotonie von e^x besitzt diese Funktion eine Umkehrfunktion.

Definition. (*natürlicher Logarithmus*)

5/3/27

Die Umkehrfunktion von e^x heißt *natürlicher Logarithmus*.

Bez.: $\ln(x)$ oder $\ln x$