

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Definition. (*ausgezeichnete Zerlegungsfolge*)

9/2/15

Es sei $(\mathfrak{z}_\nu)_{\nu=0,1,2,\dots}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls I .

(\mathfrak{z}_ν) heißt *ausgezeichnete Zerlegungsfolge* von I

$$\stackrel{\text{Df}}{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} d(\mathfrak{z}_\nu) = 0.$$

Satz 9.7 Sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und (\mathfrak{z}_ν) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I . Dann gilt:

9/2/16

$$(1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$(2) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{J}_\nu) = \int_a^b f(x) dx.$$

(3) *Ist f in I integrierbar, dann sind die Limites in (1) und (2) gleich $\int_a^b f(x) dx$.*