

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

##### Satz 8.8 (Kettenregel)

8/1/32

Es sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  (also  $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ).

Ist  $g$  in  $\bar{c}$  und  $f$  in  $g(\bar{c})$  differenzierbar, dann ist  $f \circ g$  in  $\bar{c}$  differenzierbar, und es ist  $(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c})$ .

(Das Produkt der „inneren“ und der „äußeren“ Ableitung ist ein Produkt von Matrizen.)

##### Beispiele.

##### (1) Spezialfall einer Verkettung

8/1/35/1

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , also  $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $g := (g_1, g_2)$ .

Speziell sei  $g_1(t) := t$ ,  $g_2(t) := t^2$ , also  $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$  und  $f(x, y) := \sin(x \cdot y)$ .

Für  $x = g_1(t)$  und  $y = g_2(t)$  erhält man

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t)) = \sin(t \cdot t^2) = \sin t^3.$$

Offenbar ist  $f \circ g$  eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, folglich läßt sich die Ableitung nach den Regeln für Funktionen einer Veränderlichen bilden:

$$(f \circ g)'(t) = (\cos t^3) \cdot 3t^2.$$

Wir werden jetzt die Ableitung nach den Regeln für Funktionen mehrerer Veränderlicher berechnen; es wird sich zeigen, daß das gleiche Ergebnis entsteht.

Es ist

$$f'(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right),$$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) := (*).$$

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(xy) \cdot y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) = \cos(g_1(t) \cdot g_2(t)) \cdot g_2(t) = (\cos t^3) \cdot t^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \cdot x \implies \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) = \cos(g_1(t) \cdot g_2(t)) \cdot g_1(t) = (\cos t^3) \cdot t,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t}(t) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) = 2t.$$

Dann ist

$$(f \circ g)'(t) = (\star) = (\cos t^3) \cdot t^2 \cdot 1 + (\cos t^3) \cdot t \cdot 2t = (\cos t^3) \cdot 3t^2.$$