

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Im folgenden betrachten wir eine besonders wichtige Klasse von Funktionen, nämlich die stetigen Funktionen. 5/2/0

Definition. (*Stetigkeit*) 5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\overline{\text{Def}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

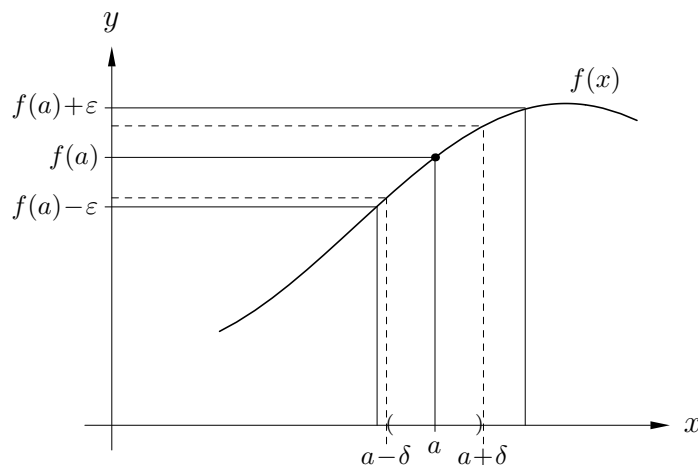


Abb. 5.7 Ist die Funktion f an der Stelle a stetig und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein $\delta > 0$, so daß durch f die δ -Umgebung von a in die zu $f(a)$ gehörende ε -Umgebung abgebildet wird, also $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$.

Offenbar leistet auch jedes kleinere $\delta > 0$ das Verlangte.

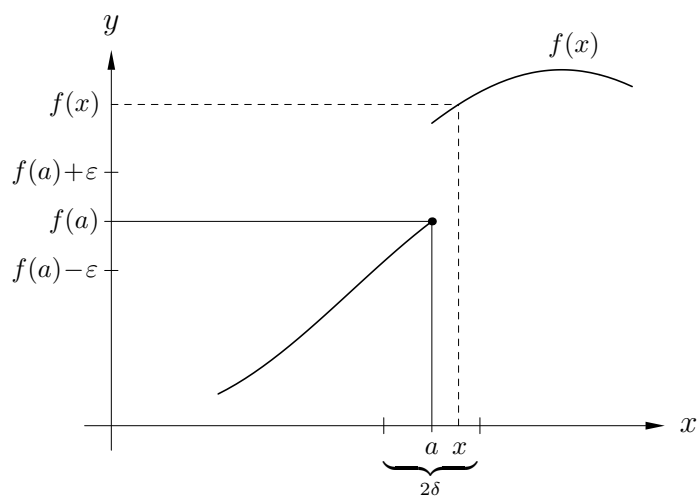


Abb. 5.8 Die Funktion f ist an der Stelle a nicht stetig. Denn ist $\varepsilon > 0$ wie in der Abbildung gegeben, dann existiert kein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(a)$ stets gilt: $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.

Definition. (*stetig in einer Menge*) 5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

- (1) f ist stetig in M
 $\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.
 (2) f ist stetig
 $\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Beispiele.

1. $f(x) = c$, $D(f) = \mathbb{R}$. (vgl. Abb. 5.9)

5/2/4/1

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Konstante Funktionen sind also stetig.

2. $f(x) = x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. (vgl. Abb. 5.10)

5/2/4/2

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen wieder $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

Folglich ist auch die Identitätsfunktion stetig.

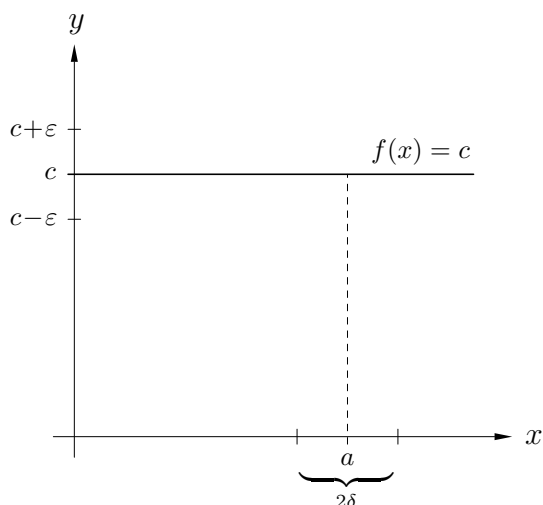


Abb. 5.9 – Konstante Funktion

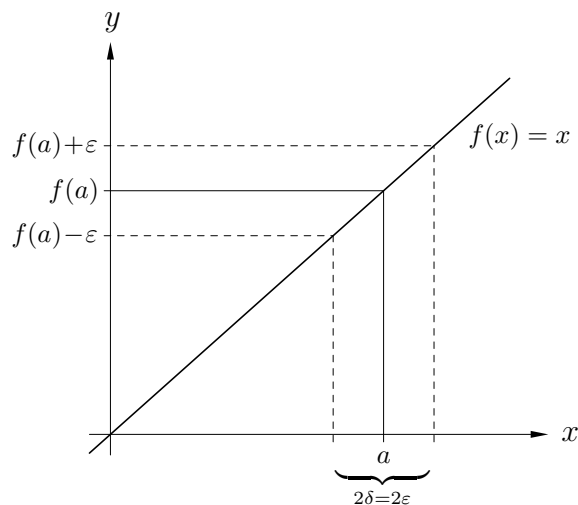


Abb. 5.10 – Identitätsfunktion

3. Es sei $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

5/2/4/3

Um die Stetigkeit von $f(x)$ in a nachweisen zu können, haben wir (entsprechend der Definition) für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Es ist

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x + a| \cdot |x - a| := (\star)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Erste Näherung für δ : $0 < \delta \leq 1$.

Dann ist $|x + a| = |x - a + 2a| \leq \underbrace{|x - a|}_{< \delta \leq 1} + |2a| \leq 1 + |2a|$.

Folglich ist

$$|f(x) - f(a)| = (\star) \leq |x + a| \cdot |x - a| \leq (1 + |2a|) \cdot |x - a|.$$

Wählt man jetzt $\delta \leq \frac{\varepsilon}{1+|2a|}$, dann ist für $|x-a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

4. $\frac{x^2-1}{x-1}$ ist in $a=1$ nicht stetig, da f an der Stelle a nicht definiert ist. 5/2/4/4

5. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.11) 5/2/4/5

Behauptung: f ist in $a=0$ nicht stetig.

Stetigkeit in $a=0$ formal ausgedrückt bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) (|x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Folglich bedeutet Unstetigkeit an dieser Stelle:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D(f) (|x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon).$$

Es sei $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig.

Ist $x \in U_\delta(0)$ mit $-\delta < x < 0$, dann ist $|f(x) - f(0)| = |-1 - 1| = 2 \geq \varepsilon = 1$.

Hieraus folgt die Behauptung.

6. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.12) 5/2/4/6

f ist in keinem Punkt des Definitionsbereiches stetig, denn in jeder δ -Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ liegen rationale und irrationale Zahlen. Wählt man z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\delta > 0$ beliebig, dann liegt wenigstens ein Funktionswert $f(x)$ mit $x \in U_\delta(a)$ und x rational bzw. irrational außerhalb von $U_\varepsilon(f(a))$.

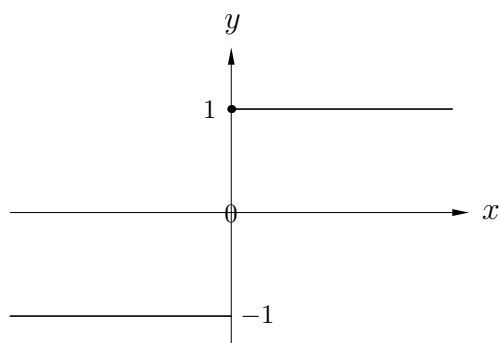


Abb. 5.11

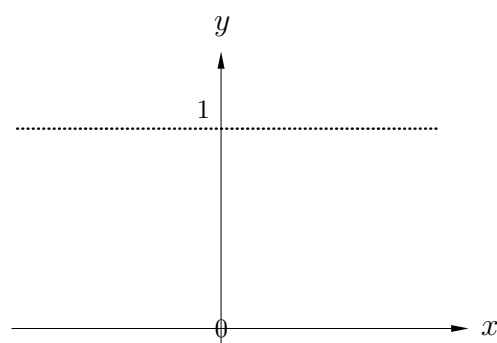


Abb. 5.12

Kriterien für die Stetigkeit

5/2/5

Wir wollen jetzt die schon bekannten Eigenschaften über konvergente Folgen ausnutzen, um damit Ergebnisse über stetige Funktionen zu erzielen.

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).

f besitzt an der Stelle a den Grenzwert c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:
Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Definition. (*uneigentlicher Grenzwert*)

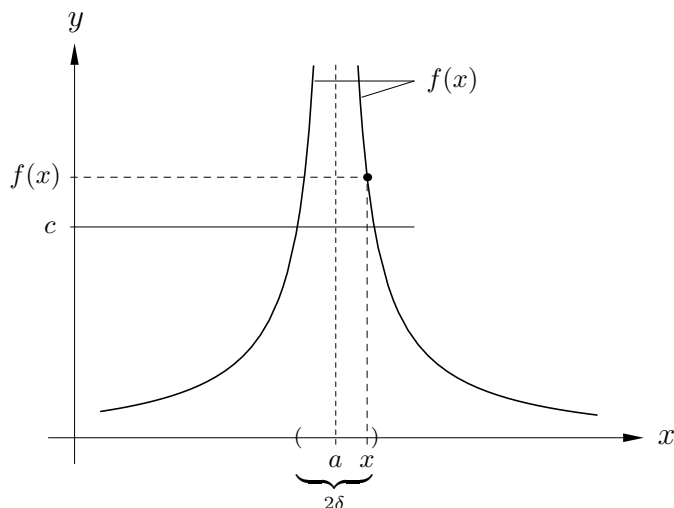
5/2/7

Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$.

f hat an der Stelle a den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ (bzw. $-\infty$)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $c \in \mathbb{R}$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $f(x) > c$ (bzw. $f(x) < c$).

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$)



5/2/8

Abb. 5.13 Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(a)$ mit $x \neq a$ gilt: $f(x) > c$; folglich ist $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Analog ließe sich auch der Fall $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ demonstrieren.

Definition. (*Grenzwert im Unendlichen*)

5/2/9

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $D(f) = [a, \infty)$ (bzw. $D(f) = (-\infty, a]$).

f besitzt für $x \rightarrow \infty$ (bzw. für $x \rightarrow -\infty$) den Grenzwert c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt:
Wenn $x > b$ (bzw. $x < b$), so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$)

Entsprechend definiert man uneigentliche Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$.

5/2/10

Beispiele.

1. Es sei $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

5/2/11/1

f ist in $a = 1$ nicht definiert (also auch nicht stetig), aber f besitzt in $a = 1$ einen Grenzwert, nämlich $c = 2$. Dazu betrachten wir für $x \neq 1$

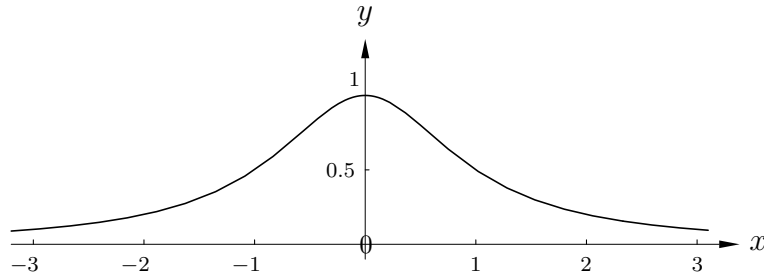
$$|f(x) - 2| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = \left| \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - 2 \right|$$

$$= |(x+1) - 2| = |x-1| := (\star).$$

Ist $\varepsilon > 0$ und wählt man $\delta = \varepsilon$, dann erhält man für $|x-1| < \delta$:
 $|f(x) - 2| = |x-1| = (\star) < \varepsilon$.

2. Sei $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Behauptung: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$



5/2/11/2

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \geq 1$. Dann gilt

Abb. 5.14

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x^2 + 1} - 0 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} := (\star).$$

Für alle $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ist $|f(x) - 0| \leq (\star) = \frac{1}{x} < \varepsilon$.

Satz 5.2 Sei $a \in D(f)$ und a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann gilt:
 f ist in a stetig gdw $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

5/2/12

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition des Grenzwertes. \square

5/2/13

Satz 5.3 (Folgenstetigkeit)

5/2/14

Es sei $a \in D(f)$. Dann gilt:

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Beweis. (\rightarrow) Sei f in a stetig. Nach Definition erhält man:

5/2/15

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow a$. Dann ist $|x_n - a| < \delta$ für fast alle n , und somit gilt auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für fast alle n .

Also $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

(\leftarrow) Annahme, f ist in a nicht stetig.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D(f)$ existiert mit $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Wählt man $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, dann gibt es für jedes n ein $x_n \in D(f)$ mit

$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, also

$x_n \rightarrow a$ aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$,
d.h., $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ **N!** \square

Jetzt können wir Grenzwertsätze bei Stetigkeitsuntersuchungen benutzen.

5/2/16

Satz 5.4 (*Stetigkeit der rationalen Operationen*)

5/2/17

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

Beweis. Mit Hilfe von Satz 5.3 erhält man die Behauptung unmittelbar aus den Grenzwertsätzen für Folgen.

5/2/18

Wir skizzieren den Beweis für die Summe. Es sei $x_n \rightarrow a$. Dann ist

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) + g(a) = (f + g)(a). \quad \square$$

Satz 5.5 (*Stetigkeit der Verkettung*)

5/2/19

Seien f, g Funktionen mit $W(g) \subseteq D(f)$.

Ist g in a stetig und f in $g(a)$ stetig, dann ist $f \circ g$ in a stetig.

Beweis. Nach Definition der Stetigkeit ist g in a und f in $g(a)$ definiert, folglich ist $a \in D(f \circ g)$.

5/2/20

Sei (x_n) eine Folge in $D(f \circ g)$ mit $x_n \rightarrow a$. Dann ist g in x_n definiert, und wegen $W(g) \subseteq D(f)$ ist f in $g(x_n)$ definiert.

Aus der Stetigkeit von g in a folgt: $g(x_n) \rightarrow g(a)$.

Nach Voraussetzung ist f in $g(a)$ stetig. Dann gilt für jede Folge (y_n) in $D(f)$:

$$\text{Wenn } y_n \rightarrow g(a), \text{ so } f(y_n) \rightarrow f(g(a)).$$

Speziell für $y_n = g(x_n)$ gilt dann

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = f(y_n) \longrightarrow f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

Nach Satz 5.3 ist also $f \circ g$ in a stetig. \square

Satz 5.6 (*Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz von Bolzano*)

5/2/21

Ist f in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$ (d.h., $f(a) \cdot f(b) < 0$), dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $f(c) = 0$.

Beweis. Es sei o.B.d.A. $f(a) < 0 < f(b)$ (sonst wird $-f(a) < 0 < -f(b)$ betrachtet).

5/2/22

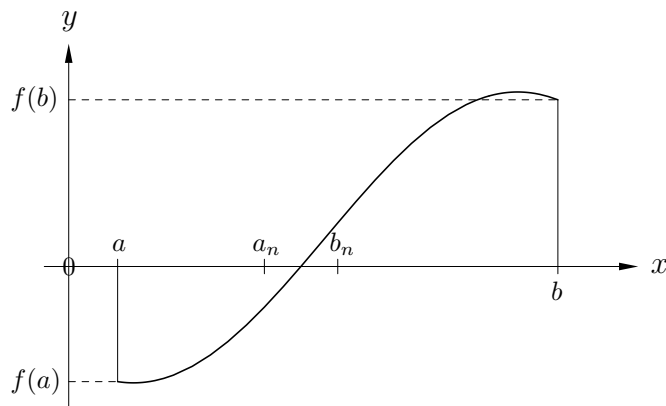


Abb. 5.15 Ist c_{n+1} der Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$, dann wird entsprechend der Bedingung $f(c_{n+1}) < 0$ bzw. $f(c_{n+1}) \geq 0$ das linke bzw. das rechte Teilintervall als $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ gewählt.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, so daß

$$f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad \text{und} \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Sei $a_0 := a$, $b_0 := b \implies f(a) < 0 \leq f(b)$.

Für n sei $[a_n, b_n]$ schon definiert (mit den geforderten Eigenschaften).

Sei $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$; dann definieren wir

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls} \quad f(c_{n+1}) \geq 0 \quad \text{und}$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls} \quad f(c_{n+1}) < 0.$$

Offenbar ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt und (b_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Folglich existieren $\lim a_n$ und $\lim b_n$, und wegen $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ ist $\lim a_n = \lim b_n$.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom existiert ein c mit $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n .

$\implies \lim a_n = c = \lim b_n$.

Nach Voraussetzung ist $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$ für alle n . Da f in c stetig ist, gilt:

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c)$$

Daraus folgt also $f(c) = 0$. \square

Korollar (Zwischenwertsatz)

5/2/23

Ist f in $[a, b]$ stetig, $d \in \mathbb{R}$ beliebig und $f(a) < d < f(b)$ oder $f(a) > d > f(b)$, dann existiert ein $c \in (a, b)$, so daß $f(c) = d$.

Beweis. Setzt man $g(x) = f(x) - d$, dann erfüllt g die Voraussetzungen des Nullstellensatzes. Folglich gibt es ein c mit $g(c) = 0 = f(c) - d$, also $f(c) = d$. \square

5/2/24

Satz 5.7 Ist f in $[a, b]$ injektiv und stetig, dann ist f in $[a, b]$ streng monoton. 5/2/25
($\implies f$ besitzt in $[a, b]$ eine Umkehrfunktion.)

Beweis. Übungsaufgabe! 5/2/26
(Hinweis: Man nehme an, daß f nicht streng monoton ist und benutze den Zwischenwertsatz!) \square

Satz 5.8 Ist f in $[a, b]$ injektiv und stetig, dann ist f^{-1} in $[\alpha, \beta]$ stetig, wobei 5/2/27
 $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ und $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.

Beweis. Nach Satz 5.7 ist f in $[a, b]$ streng monoton. 5/2/28

Sei o.B.d.A. f in $[a, b]$ streng monoton wachsend und $\alpha := f(a)$, $\beta := f(b)$ (für „fallend“ verläuft der Beweis analog).

Dann ist $f(a) < f(b)$, und nach dem Zwischenwertsatz werden alle Werte d mit $f(a) < d < f(b)$ durch f angenommen, also $f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [\alpha, \beta]$.

Sei $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Wir haben zu zeigen, daß f^{-1} in γ stetig ist.

Dazu sei (y_n) eine Folge mit $y_n \in [\alpha, \beta]$ und $y_n \rightarrow \gamma$.

Wegen $y_n, \gamma \in [\alpha, \beta] = f([a, b])$ existieren $x_n, c \in [a, b]$, so daß $f(x_n) = y_n$ und $f(c) = \gamma$. Damit ist (x_n) eine beschränkte Folge in $[a, b]$. Folglich besitzt (x_n) einen Häufungspunkt c_0 und eine gegen c_0 konvergierende Teilfolge $(x_{n_i}) : x_{n_i} \rightarrow c_0$. Da $[a, b]$ abgeschlossen ist, gehört c_0 zu $[a, b]$. Aus der Stetigkeit von f in $[a, b]$ folgt somit $f(x_{n_i}) \longrightarrow f(c_0)$.

Da $y_n \rightarrow \gamma$ und (y_{n_i}) eine Teilfolge von (y_n) ist, gilt auch $y_{n_i} \rightarrow \gamma$. Also $y_{n_i} \rightarrow \gamma$ und $y_{n_i} = f(x_{n_i}) \longrightarrow f(c_0)$, folglich ist

$$f(c) = \gamma = f(c_0).$$

Gäbe es einen weiteren Häufungspunkt c' von (x_n) , so gäbe es eine Teilfolge (x'_{n_i}) von (x_n) mit $x'_{n_i} \rightarrow c'$.

Analog wie im vorhergehenden Teil des Beweises existiert eine Teilfolge (y'_{n_i}) von (y_n) mit $y'_{n_i} = f(x'_{n_i}) \longrightarrow f(c')$. Wegen $y'_{n_i} \rightarrow \gamma$ gilt dann auch

$$f(c') = \gamma = f(c).$$

Aus der Injektivität von f folgt schließlich $c' = c_0 = c$. Die beschränkte Folge (x_n) besitzt also genau einen Häufungspunkt, und dieser ist c , also $x_n \rightarrow c$.

Nach Voraussetzung gilt: $y_n \rightarrow \gamma$. Folglich ist

$$f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(x_n)) = x_n \longrightarrow c = f^{-1}(f(c)) = f^{-1}(\gamma),$$

d.h., f ist an der Stelle γ stetig. \square

Beispiel. Sei $f(x) = x^2$, $x \geq 0$. Dann ist offenbar f injektiv und stetig in $[0, b]$ für jedes $b > 0$ (folglich ist f auch in $[a, \infty)$ stetig). Nach dem vorhergehenden Satz ist $f^{-1} = \sqrt{x}$ in $[f(0), f(b)] = [0, b^2]$ stetig, also auch in $[0, \infty)$. 5/2/29