

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.8 Länge von Kurven

Beispiele. Wir geben jetzt einige wichtige Beispiele von Kurven an (vgl. auch die Abbildungen 6.9 und 6.10 aus dem Kapitel 6). 9/8/2

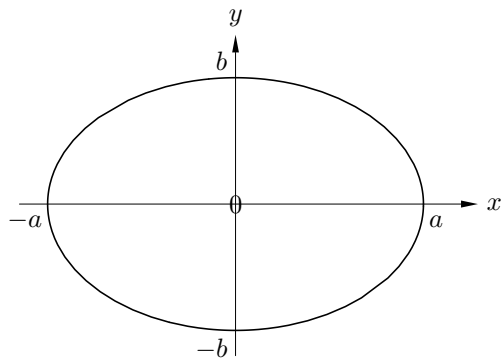


Abb. 9.20 Durch $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ist eine Ellipse definiert. Für $a = b$ entsteht ein Kreis.

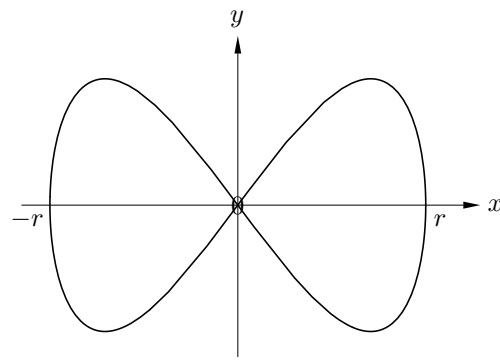


Abb. 9.21 Durch $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (r \cos t, r \sin 2t)$ ist eine Lemniskate definiert.

Die nächste Abbildung zeigt eine sog. *Schraubenlinie*.

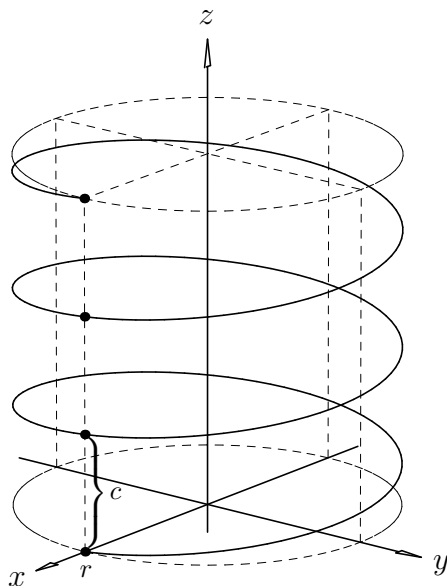


Abb. 9.22 Durch $f := [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$ ist eine Schraubenlinie mit der (positiven) Ganghöhe c definiert (Rechtsgewinde). Wenn t das Intervall $[2i\pi, 2(i+1)\pi]$ durchläuft ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$), dann durchläuft $f(t)$ genau einen Gewindegang. In der Abbildung sind drei Gewindegänge dargestellt. Für $c < 0$ entsteht eine „absteigende“ Schraubenlinie (Linksgewinde).

Definition. (Länge einer Kurve)

9/8/6

Sei \mathfrak{k} eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$.

\mathfrak{k} ist *rektifizierbar* (d.h. \mathfrak{k} besitzt eine Länge)

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert $\sup\{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \text{ beliebige Zerlegung von } [a, b]\}$.

Das Supremum heißt, falls es existiert, *Länge der Kurve* und wird mit $l(\mathfrak{k})$ bezeichnet.

Satz 9.23 Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist \mathfrak{k} rektifizierbar, und es gilt

9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k (f'_i(t))^2} dt.$$

Übungsaufgaben

19. (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der durch $f(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ im Intervall $[0, 2]$ definierten Kurve.
- (b) Bestimmen Sie die Länge der Schraubenlinie mit dem Radius r und der Ganghöhe $c \cdot 2\pi$ für einen Gewindegang.
- (c) Es sei $\bar{f}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung der Astroide).
Bestimmen Sie die Länge des gegebenen Kurvenstücks.

9/10/19