

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (Zerlegung)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine Zerlegung (oder Partition) von I

$\overline{\text{Df}}$ \mathfrak{z} ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Definition. (Untersumme, Obersumme)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\overline{\text{Df}} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (Unterintegral, Oberintegral, Integral)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.:} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes* (Riemann-) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.:} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.15 Sei $a < b$, und seien f, g in I integrierbar. Dann gilt:

9/5/0

(1) Wenn $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(2) Wenn $f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Beweis. (1). Sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I und $I_i = [a_{i+1}, a_i]$. Dann ist wegen $a_{i+1} - a_i > 0$ und $\inf_{x \in I_i} f(x) \geq 0$ auch

9/5/1

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{a}{a}}^b f(x) dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \geq 0.$$

(2). Wenn $f(x) \leq g(x)$, so $0 \leq g(x) - f(x)$ für jedes $x \in I$. Nach (1) gilt dann

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx,$$

also auch

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad \square$$