

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Definition. (*Konvergenzradius*)

4/4/5

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.

ϱ heißt *Konvergenzradius* von $\sum a_n(x-a)^n$

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

Bemerkung. Da einer der drei Fälle immer auftritt, kann man auf diese Weise den Konvergenzradius bestimmen. Zur Übung untersuche man noch einmal die letzten Beispiele 1. – 4. Existieren $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ bzw. $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ oder haben sie den uneigentlichen Grenzwert ∞ , dann ist $l = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ bzw. $l = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ (in Satz 4.21). Dies kann bei der Bestimmung des Konvergenzradius genutzt werden.

4/4/15

Übungsaufgaben

18. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

4/6/18

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n.$$