

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Bemerkung. $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ist doppeldeutig, es bezeichnet die Folge der Partialsummen von (a_n) und den Wert der Reihe, falls sie konvergiert. Dies wird im praktischen Umgang aber nicht zu Verwechslungen führen.

4/1/1

Definition. (Divergenz von Reihen)

4/1/2

$\sum a_i$ ist divergent $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum a_i$ ist nicht konvergent.

Beispiel. (Geometrische Reihe)

4/1/3

Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.

Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; ($\sum a^i$ heißt geometrische Reihe).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$ ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \cdots + a^n)(1-a) = 1 + \cdots + a^n - (a + \cdots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n -ten Partialsumme berechnet.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$

Satz 4.1 $\sum a_i$ konvergiert gegen a gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|S_n - a| < \varepsilon$. 4/1/4

Beweis. Trivial; die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition einer Reihe und der Konvergenz von Folgen. \square 4/1/5

Satz 4.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen) 4/1/6
 $\sum a_i$ ist konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $m, n > n_0$ gilt: $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen. \square 4/1/7

Korollar 1. $\sum a_i$ konvergiert gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $k \geq 1$ gilt: $|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$. 4/1/8

Beweis. Sei $m = n + k$ (in Satz 4.2). Dann gilt: 4/1/9

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k} - (a_1 + \dots + a_n)| \\ &= |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square

Korollar 2. Wenn $\sum a_i$ konvergiert, dann ist $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$. 4/1/10

Beweis. Setzt man in dem vorhergehenden Korollar $k = 1$, dann ist $|a_{n+1}| < \varepsilon$ für jedes $n \geq n_0$. Damit gilt $a_{n+1} \rightarrow 0$, also $a_i \rightarrow 0$. \square 4/1/11

Korollar 3. Ist (a_i) keine Nullfolge, so ist $\sum a_i$ divergent. 4/1/12

Beweis. Kontraposition von Korollar 2! \square 4/1/13

Beispiel. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ist nicht konvergent, da $((-1)^n)$ keine Nullfolge ist. 4/1/14

Definition. (absolute Konvergenz) 4/1/15
 $\sum a_i$ ist absolut konvergent $\iff \sum |a_i|$ ist konvergent.

Satz 4.3 Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent. 4/1/16

Beweis. Sei $\sum |a_i|$ konvergent und $\varepsilon > 0$. 4/1/17

Dann existiert nach Korollar 1 ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und $k \geq 1$:
 $|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$. Also

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Folglich ist auch $\sum a_i$ konvergent. \square

Bemerkung. Wenn $\sum a_i$ konvergiert, dann muß $\sum |a_i|$ noch nicht konvergent sein. 4/1/18
 (Der Beweis hierzu erfolgt später.)

Satz 4.4 Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ konvergent und $a, b \in \mathbb{R}$. 4/1/19

Dann ist $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i)$ konvergent und $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i) = a \cdot \sum a_i + b \cdot \sum b_i$.

Beweis. Sei $S'_n = \sum_{i=0}^n a_i, S''_n = \sum_{i=0}^n b_i$ und $S_n = \sum_{i=0}^n (a \cdot a_i + b \cdot b_i)$. 4/1/20

Dann ist $S_n = a \cdot S'_n + b \cdot S''_n$. Aus den Eigenschaften für konvergente Folgen (Satz 3.10) erhält man sofort die Behauptung. \square

Satz 4.5 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ist konvergent gdw für jedes $k \geq 1$ gilt: $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ ist konvergent 4/1/21

(und es ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{k-1} a_i + \sum_{i=k}^{\infty} a_i$).

Beweis. Der Beweis ergibt sich sofort aus den Eigenschaften für konvergente Folgen. 4/1/22
 Man benutzt für $n \geq k$:

$$S_n = a_0 + \cdots + a_n = \underbrace{a_0 + \cdots + a_{k-1}}_{:=c} + \underbrace{a_k + \cdots + a_n}_{:=S'_n}.$$

Wir wissen schon, daß (S_n) konvergiert gdw (S'_n) konvergiert und daß $\lim S_n = c + \lim S'_n$.
 Hieraus folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Ein Anfangsstück einer Reihe ist also ohne Belang für das Konvergenz- 4/1/23
 verhalten der Reihe, wohl aber für den Wert der Reihe (falls Konvergenz vorliegt).

Definition. (alternierende Reihe) 4/1/24

$\sum a_i$ heißt *alternierend*
 $\stackrel{\text{Def}}{=} a_i \neq 0$ und $a_i < 0$ gdw $a_{i+1} > 0$ für jedes i
 (oder aber $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ für jedes i).

Beispiele.

4/1/25

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \mp \dots.$$

Satz 4.6 (*Leibniz-Kriterium*)

4/1/26

Ist $\sum a_i$ alternierend und $\lim a_i = 0$ und $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$ monoton fallend,
 dann ist $\sum a_i$ konvergent.

Beweis. Es sei o.B.d.A. $a_0 > 0$ (anderenfalls betrachten wir $a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und $a_1 > 0$).

4/1/27

Weiterhin sei $|a_i| = \alpha_i$ (> 0). Dann ist $\lim \alpha_i = 0$ und $\sum a_i = \sum (-1)^i \cdot \alpha_i$.

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} |S_{n+k} - S_n| &= \left| (-1)^{n+1} \alpha_{n+1} + \dots + (-1)^{n+k} \cdot \alpha_{n+k} \right| \\ &= \left| (-1)^{n+1} (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \dots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k}) \right| \\ &= \underbrace{\left| (-1)^{n+1} \right|}_{=1} \cdot \left| \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \dots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k} \right| \\ &= \left| \underbrace{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}}_{\geq 0} \pm \dots + (-1)^{k-1} \alpha_{n+k} \right| := (\star) \end{aligned}$$

In Abhängigkeit von k ist die Anzahl der Summanden α_i in (\star) gerade bzw. ungerade. Nach Voraussetzung ist die Folge (α_i) monoton fallend, also $\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} \geq 0, \dots$. Ist k gerade, dann kann man die Summanden in (\star) paarweise zusammenfassen, und es ist

$$(\star\star) := (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}) + \dots + (\alpha_{n+k-1} - \alpha_{n+k}) \geq 0.$$

Ist k ungerade, dann bleibt bei der paarweisen Zusammenfassung α_{n+k} übrig, aber α_{n+k} ist offensichtlich nicht negativ. Folglich ist auch in diesem Fall $(\star\star) \geq 0$.

Andererseits ist

$$(\star\star) = \alpha_{n+1} - \underbrace{(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(\alpha_{n+k-1} - \alpha_{n+k})}_{\geq 0} \leq \alpha_{n+1}.$$

Insgesamt gilt also

$$0 \leq (\star\star) \leq \alpha_{n+1} \quad \text{und damit} \quad |S_{n+k} - S_n| = |(\star\star)| \leq \alpha_{n+1}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\alpha_n \rightarrow 0$ gibt es ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$:
 $|S_{n+k} - S_n| \leq \alpha_{n+1} < \varepsilon. \implies (S_n) = \sum a_i$ ist konvergent. \square

Satz 4.7 Sei $\sum a_i$ eine Reihe mit $a_i \geq 0$ für jedes i . 4/1/28
 Dann gilt: $\sum a_i$ ist konvergent gdw die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Beweis. Es sei $S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Zum Beweis benutzen wir Satz 3.8 (monotone Folgen sind 4/1/29
 konvergent gdw sie beschränkt sind).

(\longrightarrow) $\sum a_i$ ist konvergent $\implies (S_n)$ konvergent $\implies (S_n)$ beschränkt.

(\longleftarrow) Wegen $a_i \geq 0$ für jedes i , ist (S_n) monoton wachsend. Ist außerdem (S_n) beschränkt, so ist $(S_n) = \sum a_i$ konvergent. \square

Beispiele.

1. (Anwendung des Leibniz-Kriteriums) 4/1/30/1

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}}_{:= a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent.

Offenbar ist $\sum a_n$ alternierend, $a_n \rightarrow 0$ und $|a_n| = \frac{1}{n+1}$ monoton fallend, folglich ist die betrachtete Reihe konvergent.

Sei $a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \implies a_0 = 1 > a > 0$

(vgl. Beweis zu Satz 4.6; mit dem späteren Korollar zu Satz 7.11 läßt sich leicht zeigen, daß $a = \ln 2$).

2. (Die Glieder einer Reihe dürfen nicht beliebig „umsortiert“ werden.) 4/1/30/2

Wir betrachten die Reihe aus Beispiel 1 und nehmen an, daß man die Glieder einer Reihe beliebig umsortieren darf, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots && \text{(umsortiert)} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \pm \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots}_{=0} && \text{(0 addiert)} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \dots && \text{(umsortiert)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \cdots \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \cdots = 0 \quad \text{!} \quad (\text{umsortiert und addiert})
\end{aligned}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$\begin{aligned}
S_{2^{n+1}} - S_{2^n} &= \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^n + 2^n} \\
&\quad (\text{jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \frac{1}{2^{n+1}}) \\
&\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n.
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \cdots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\
&= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\
&\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

4. Ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ alternierend und $a_i \rightarrow 0$ aber $(|a_i|)$ nicht monoton fallend, dann muß $\sum a_i$ nicht konvergent sein. 4/1/30/4

Sei $a_i = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{falls } i \text{ ungerade und } i = 2n+1, \\ -\frac{1}{2^n}, & \text{falls } i \text{ gerade und } i = 2n. \end{cases}$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = -\frac{1}{2^0} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \mp \cdots$$

Wir betrachten $S_{2^{m+1}} = a_0 + \dots + a_{2^{m+1}}$.

Summiert man in dieser endlichen Summe die a_i mit ungeradem Index i , so erhält man

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{vgl. Beispiel 3.})$$

Die Summe der a_i mit geradem Index ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{2^{2^m}} &= -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^m}\right) = \\ -\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}} &= -2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{m+1}}\right) \geq -2 \quad (\text{vgl. geometrische Reihe}) \end{aligned}$$

(denn für $i = 2^{m+1} = 2n$ ist $n = 2^m$, also $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2^m}}$).

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} S_{2^{m+1}} &= \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 1 + \frac{m}{2}} - \underbrace{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^m}\right)}_{\leq 2} \\ &\geq 1 + \frac{m}{2} - 2 \geq \frac{m}{2} - 1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Folglich ist (S_{2^n}) eine unbeschränkte Teilfolge von (S_n) und somit $\sum a_i$ nicht konvergent.

5. Beispiel dafür, wie der junge Leibniz 1672 in Paris – er sollte dort seine „Rechenkünste“ unter Beweis stellen – mit falschen Hilfsmitteln den richtigen Wert einer Reihe berechnet hat (vgl. Wußing, H. und Wolfgang Arnold. Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1975, S. 212).

4/1/30/5

Gegeben ist die Reihe $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{1 + \dots + n} + \dots$.

Man berechne den Wert der Reihe.

Ansatz von Leibniz:

Sei $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ (harmonische Reihe; nicht konvergent!) und

$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$. Dann ist (nach Leibniz):

$$\begin{aligned} B - 1 + \frac{1}{2}A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)}_{=\frac{1}{3}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right)}_{=\frac{1}{4}} + \dots \\ &= B. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$B - 1 + \frac{1}{2}A = B \quad \text{und damit} \quad A = 2.$$

Erstaunlicherweise stimmt der Wert. Die Methoden sind aber fehlerhaft, da mit divergenten Reihen so umgegangen wurde, als wären sie konvergent.

Es soll jetzt noch eine exakte Lösung gegeben werden.

Es ist (nach Gauß 1777 – 1855)

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies \frac{1}{1 + \cdots + n} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Es ist $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; also

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_0 + \frac{1}{3} - \cdots - \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_0 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2. \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \cdots + i} = 2.$$

Definition. (*Minorante, Majorante*)

4/1/31

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern.

$\sum a_i$ heißt *Minorante* von $\sum b_i$ und gleichzeitig heißt $\sum b_i$ *Majorante* von $\sum a_i$
 $\overline{\text{Df}} \quad a_i \leq b_i$ für alle i .

Satz 4.8 (*Majorantenkriterium*)

4/1/32

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

Beweis. (1). Nach Voraussetzung gilt $0 \leq a_i \leq b_i$ für alle i . Folglich ist

4/1/33

$$0 \leq S_n = a_0 + \cdots + a_n \leq S'_n = b_0 + \cdots + b_n.$$

Da (S_n) monoton wächst, genügt zu zeigen, daß (S_n) beschränkt ist.

Nach Voraussetzung ist (S'_n) konvergent, also auch beschränkt. Folglich ist auch (S_n) beschränkt.

(2) Kontraposition von (1). \square

Bemerkung. In Satz 4.8 genügt es vorauszusetzen, daß $0 \leq a_i \leq b_i$ für fast alle i gilt. 4/1/34

Satz 4.9 (Wurzelkriterium)

4/1/35

Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

(1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

(2) Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Beweis. (1). Es sei $0 < q < 1$ und $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q \implies |a_i| \leq q^i$.

4/1/36

$\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ ist eine konvergente Majorante von $\sum |a_i|$ (geometrische Reihe). Folglich ist $\sum |a_i|$ (nach dem Majorantenkriterium) konvergent, und damit ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

(2). Sei $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$. Dann ist $|a_i| \geq 1$ und daher (a_i) keine Nullfolge. Folglich ist $\sum a_i$ divergent. \square

Bemerkung. Für die Anwendung des Wurzelkriteriums genügt es, daß $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ für fast alle i . (Offenbar folgt aus $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ sofort $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$.) 4/1/37

Ist andererseits (a_i) beschränkt und $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} := c < 1$, so ist $\sqrt[i]{|a_i|} \leq \underbrace{c + \frac{1-c}{2}}_{:= q < 1}$ für

fast alle i ; folglich ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

Ist also $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$, so ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

Analog erhält man: Wenn $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für fast alle i , so ist $\sum a_i$ divergent.

Achtung: Für die Konvergenz von $\sum a_i$ reicht es noch nicht, daß stets $\sqrt[i]{|a_i|} < 1$ (bzw. $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = 1$) ist;

z.B. für $a_i = \frac{1}{i}$ ist $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} < 1$, denn $\frac{1}{i} < 1$ (bzw. $\overline{\lim} \frac{1}{i} = 1$). Aber $\sum \frac{1}{i}$ ist nicht konvergent.

Wenn $\lim \sqrt[i]{|a_i|}$ existiert, dann ist offenbar $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = \lim \sqrt[i]{|a_i|}$, und man rechnet nur mit dem Limes.

Satz 4.10 (Quotientenkriterium)

4/1/38

Es sei $a_i \neq 0$ für jedes i . Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für jedes i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Beweis. (1). Sei $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$. Dann ist $|a_{i+1}| \leq q \cdot |a_i|$ für alle i , folglich gilt

4/1/39

$$|a_i| \leq q \cdot |a_{i-1}| \leq q^2 \cdot |a_{i-2}| \leq \dots \leq q^i \cdot |a_0|.$$

Damit ist $\sum |a_0| \cdot q^i = |a_0| \cdot \sum q^i$ eine konvergente Majorante von $\sum |a_i|$, folglich ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

(2). Sei jetzt $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für alle i . Dann ist $|a_{i+1}| \geq |a_i| \geq \dots \geq |a_0|$ und $|a_0| > 0$ (nach Voraussetzung). Folglich ist (a_i) keine Nullfolge und damit $\sum a_i$ divergent. \square

Bemerkung. Für die Anwendung des Quotientenkriteriums genügt es, daß

4/1/40

$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q < 1$ für fast alle i .

Ähnlich wie beim Wurzelkriterium folgt aus $\overline{\lim} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| < 1$ die absolute Konvergenz von $\sum a_i$.

Ist andererseits $\underline{\lim} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| > 1$, dann ist $\sum a_i$ divergent.

Beispiele.

4/1/41

1. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$, $a \neq 0$, also $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$.

Hier bietet sich das Wurzelkriterium an. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a}{n}\right|^n} = \left|\frac{a}{n}\right| \leq q < 1$$

für fast alle n ; z.B. $q = \frac{1}{2}$ leistet das Verlangte.

Benutzt man für dasselbe Beispiel das Quotientenkriterium, dann wird die Berechnung komplizierter. Es ist (vgl. auch Beispiel 3/1/35)

$$\left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n}{n^n}} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \right| \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = |a| \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} := (\star).$$

Wir wissen schon, daß $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, also $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2}$, folglich ist

$$(\star) \leq |a| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \leq q < 1 \text{ für fast alle } n \text{ (z.B. für } q = \frac{1}{2}).$$

2. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \neq 0$.

4/1/42

Hier bietet sich das Quotientenkriterium an, denn

$$\left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \right| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = |a| \cdot \frac{1}{n+1} \leq q < 1$$

für fast alle n und z.B. $q = \frac{1}{2}$.

Dasselbe Beispiel wird mit dem Wurzelkriterium komplizierter.

Die Beispiele 1 und 2 zeigen, daß die untersuchten Reihen für alle fixierten Elemente $a \in \mathbb{R}$ konvergieren.

3. Wir betrachten jetzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ und zeigen, daß diese Reihe für gewisse Werte $a \in \mathbb{R}$ konvergiert und für andere Werte divergiert.

4/1/43

Es sei zunächst $|a| < 1$, $a \neq 0$. Wir benutzen das Quotientenkriterium. Für $q = |a|$ und für fast alle n gilt

$$\left| \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} \right| = |a| \cdot \frac{n}{n+1} \leq q < 1.$$

Ist $|a| = 1$, so erhält man für $a = 1$ die harmonische Reihe (diese ist divergent) und für $a = -1$ eine konvergente alternierende Reihe.

Es sei nun $|a| > 1$. Dann ist $\left(\frac{a^n}{n}\right)$ keine Nullfolge, und somit $\sum \frac{a^n}{n}$ nicht konvergent.

4. Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4/1/44

Die Konvergenz dieser Reihe kann man weder mit dem Wurzel- noch mit dem Quotientenkriterium nachweisen (bitte ausprobieren!). Für eine geeignete konvergente Majorante könnte man das Majorantenkriterium heranziehen.

Es ist $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent. Denn

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \implies$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist $S_k \rightarrow 1$, und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ eine konvergente Majorante von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$ erhält man die Behauptung.

5. Wir betrachten jetzt ein Beispiel für eine Reihe, bei der das Quotientenkriterium versagt (das Wurzelkriterium ließe sich anwenden). 4/1/45

Es sei

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \cdots = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots. \end{aligned}$$

Folglich ist $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann gilt für alle geraden n : $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und folglich $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$.

Die Reihe ist aber konvergent, denn es ist $S_k = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k$ für

gerade k und damit $S_k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2$.

Für beliebige k ist (S_k) monoton wachsend und beschränkt, also auch konvergent.