

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.4 Potenzreihen

**Definition.** (*Konvergenzradius*)

4/4/5

Es sei  $\varrho$  eine nicht-negative reelle Zahl oder  $\varrho = \infty$ .

$\varrho$  heißt *Konvergenzradius* von  $\sum a_n(x-a)^n$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x$  gilt: Wenn  $|x-a| < \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x-a)^n$  absolut konvergent,  
und wenn  $|x-a| > \varrho$ , so ist  $\sum a_n(x-a)^n$  divergent.

(Hierbei soll immer gelten:  $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$  bzw.  $= \mathbb{C}$  und  $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$ .)

**Bemerkung.** Die offene Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $\varrho$  (bzw. das offene Intervall in  $\mathbb{R}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und der Länge  $2\varrho$ ) heißt *Konvergenzgebiet* oder *Konvergenzkreis* (bzw. *Konvergenzintervall*) und  $a$  heißt *Mittelpunkt der Potenzreihe*  $\sum a_n(x-a)^n$ .

4/4/12

Innerhalb dieser offenen Kreisscheibe (bzw. des offenen Intervalls) konvergiert die Potenzreihe absolut, außerhalb divergiert sie; auf dem Rande kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (man betrachte das Beispiel  $\sum \frac{x^n}{n}$  für  $x = \pm 1$ ).

#### 4.5 Rechnen mit Potenzreihen

**Satz 4.24** (*Umordnen von Potenzreihen*)

4/5/4

*Voraussetzungen:*

- (1) Es sei  $\sum a_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho > 0$ .
- (2) Weiterhin sei  $b \neq a$ ,  $|b-a| < \varrho$  und  $\varrho - |b-a| = \varrho' (> 0)$ .

*Behauptung:*

Es gibt eine Potenzreihe  $\sum b_n(x-b)^n$  mit einem Konvergenzradius  $\geq \varrho'$ ,  
so daß für jedes  $x$  mit  $|x-b| < \varrho'$  gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n, \text{ wobei } b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} (b-a)^{m-n}.$$

(**Bez.:**  $\sum b_n(x-b)^n$  entsteht aus  $\sum a_n(x-a)^n$  durch Umordnung nach Potenzen von  $(x-b)$ .)

**Beweis.** Zum Beweis benutzen wir das Korollar zum Großen Umordnungssatz.

4/5/5

Für alle  $x$  mit  $|x-a| < \varrho$  gilt stets

$$\begin{aligned} a_n(x-a)^n &= a_n((x-b) + (b-a))^n \\ &= \sum_{m=0}^n a_n \binom{n}{m} (x-b)^m (b-a)^{n-m} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{:= a_{nm}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^n a_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}. \quad (\text{wegen } \binom{n}{m} = 0 \text{ für } m > n)$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| &= \sum_{m=0}^n |a_{nm}| = |a_n| \cdot \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} |x-b|^m |b-a|^{n-m} \\ &= |a_n| \cdot (|x-b| + |b-a|)^n := \alpha_n. \end{aligned}$$

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzgebietes absolut konvergieren und nach Voraussetzung stets  $|x-b| + |b-a| < \varrho$  ist, konvergiert  $\sum \alpha_n$  absolut. Damit sind die Voraussetzungen für das Korollar erfüllt. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x-b) + (b-a))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_n \binom{n}{m} (x-b)^m (b-a)^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (x-b)^m (b-a)^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (x-b)^m (b-a)^{n-m} \quad (\text{nach dem Korollar}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (b-a)^{n-m} \right) (x-b)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (b-a)^{n-m} \right)}_{=c_n} (x-b)^m; \quad (\binom{n}{m} = 0 \text{ für } n < m) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-b)^n. \quad \square \end{aligned}$$

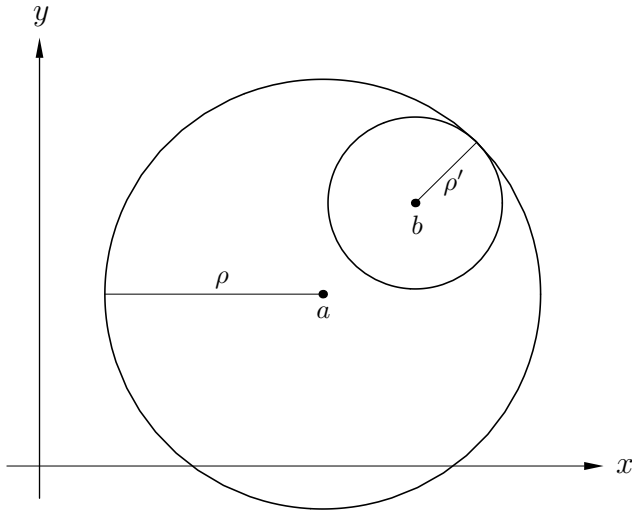


Abb. 4.3 Umordnung einer Potenzreihe  $\sum a_n(x-a)^n$  nach Potenzen von  $(x-b)$ . Die Ausgangsreihe konvergiert innerhalb des größeren Kreises. Zumindest in dem kleineren Kreis  $\{x : |x-a| < \rho'\}$  ist die umgeordnete Reihe  $\sum b_n(x-b)^n$  absolut konvergent.