

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

Bez. $f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$

Satz 7.3 (*Produktregel*)

7/1/17

Sind f, g in a differenzierbar, dann ist $f \cdot g$ in a differenzierbar, und es ist $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ (oder kurz $(f \cdot g)' = f'g + fg'$).

Beweis. Es ist

7/1/18

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} =$$

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a) + f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} =$$

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a)}{x - a} + \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} =$$

$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\longrightarrow f(a), \\ \text{stetig}}} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\substack{\longrightarrow g'(a), \\ \text{differenzierbar}}} + g(a) \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\substack{\longrightarrow f'(a), \\ \text{differenzierbar}}} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a). \quad \square$$