

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Richtungsableitung*)

8/1/7

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

Weiterhin sei $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ und $|\bar{r}| = 1$.

f ist an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} differenzierbar

Def Die Funktion $\varphi(h) := f(\bar{c} + h \cdot \bar{r})$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen h) an der Stelle 0 differenzierbar;

$$\text{d.h., es existiert } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h \cdot \bar{r}) - f(\bar{c})}{h}.$$

Der Limes heißt dann *Richtungsableitung* von f an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} .

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial \bar{r}}(\bar{c}) = f_{\bar{r}}(\bar{c}).$$

Bemerkung.

8/1/8

(1) Der Vektor \bar{r} , der die Richtung festlegt, wird stets mit der Länge 1 gewählt, damit die Richtungsableitung nur von der Richtung und nicht von der Länge des Vektors \bar{r} abhängt.

(2) Wie auch bei Funktionen einer Veränderlichen können Ableitung, partielle Ableitungen und Richtungsableitungen einer Funktion $f(\bar{x})$ in einer Menge $M \subseteq D(f)$ gebildet werden, wenn die entsprechenden Ableitungen in jedem Punkt der Menge existieren. Diese Ableitungen beschreiben neue in M definierte Funktionen, die wir der Reihe nach mit f' , $\frac{\partial f}{\partial x_i} := f_{x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} := f_{\bar{r}}$ bezeichnen.

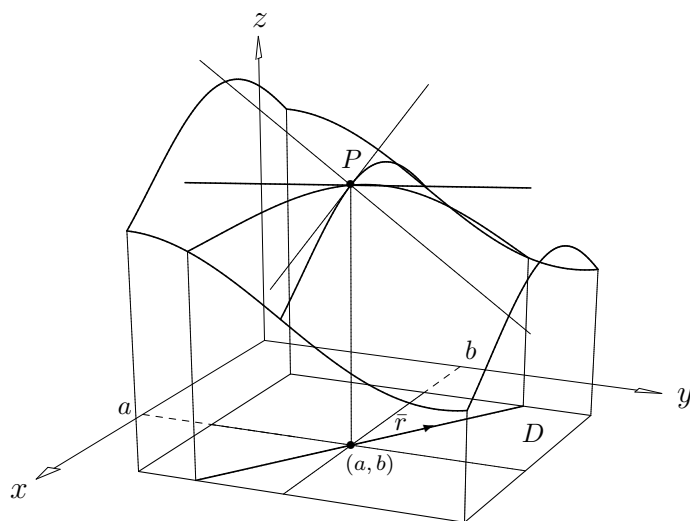


Abb. 8.2 Hier ist die analoge Situation wie in der vorhergehenden Abbildung dargestellt. Es ist zusätzlich eine Richtung durch einen Vektor \bar{r} ausgezeichnet. Schränkt man den Definitionsbereich D auf das im Bild stärker hervorgehobene Geradenstück ein, dann entsteht erneut eine Kurve auf der durch die Funktion gegebenen Fläche. Die Richtungsableitung der Funktion in Richtung \bar{r} gibt den Anstieg der Kurve in dieser Richtung an.