

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

Induktionsaxiom:

Es sei E eine Eigenschaft für natürliche Zahlen n . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage $\forall m E(m)$ zu beweisen, genügt es:

1. $E(0)$ zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2. $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$ nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und zeigt:

$$\text{Wenn } E(n), \text{ so } E(n+1).$$

$E(n)$ heißt *Induktionsvoraussetzung*, $E(n+1)$ *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a): $E(n)$ ist falsch.

Dann ist die Implikation $E(n) \rightarrow E(n+1)$ aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b): $E(n)$ ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von $E(n+1)$ zu zeigen.

Achtung: Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges n wird vorausgesetzt, daß $E(n)$ schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

IV. \mathbb{R} genügt dem Intervallschachtelungsaxiom:

2/1/6

Es sei $([a_n, b_n])_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in \mathbb{R} , so daß für jede natürliche Zahl n gilt: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$, für jede natürliche Zahl n .

Anschauliche Deutung des Axioms: Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen“; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Definition. (*Potenz*) (induktive Definition)

2/2/5

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

$$a^0 \stackrel{\text{Df}}{=} 1,$$

$$a^{n+1} \stackrel{\text{Df}}{=} a^n \cdot a.$$

Satz 2.3 Ist $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$, dann gibt es genau ein $b > 0$, so daß $b^m = a$.

2/2/7

Bez.: $b = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$; (m -te Wurzel aus a)

Beweis. Um zu zeigen, daß es genau ein solches b gibt, hat man einerseits die Existenz und andererseits die Eindeutigkeit nachzuweisen. Wir beginnen mit dem einfacheren Eindeutigkeitsbeweis.

2/2/8/1

1. Eindeutigkeit.

Angenommen, es existieren verschiedene $b_1, b_2 > 0$ mit $b_1^m = a = b_2^m$.

Sei o.B.d.A. $b_1 < b_2$. Dann zeigt man leicht (mit Hilfe von Satz 2.2(5)) induktiv über m , daß $b_1^m < b_2^m$. $\nabla!$

2. Existenz.

Es genügt, den Satz für $a > 1$ zu beweisen.

Ist nämlich $a = 1$, dann leistet $b = 1$ das Verlangte, und

ist $0 < a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$. Für $\frac{1}{a}$ existiert nach dem obigen Fall schon ein $c > 0$ mit $c^m = \frac{1}{a}$. Folglich ist $a = \frac{1}{c^m} = \left(\frac{1}{c}\right)^m$.

$b = \frac{1}{c}$ leistet somit das Verlangte.

Es sei nun $a > 1$.

(Zum Beweis wird eine geeignete Intervallschachtelung betrachtet.)

Wir definieren eine Folge $([a_n, b_n])$ von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{und} \quad a_n^m \leq a \leq b_n^m \quad \text{für alle } n.$$

Die Definition erfolgt induktiv über n .

Eine Lösung $b > 0$ für $b^m = a$ und $a > 1$ muß – falls eine solche existiert – in dem Intervall $[1, a]$ liegen.

Denn angenommen, $0 < b < 1$. Dann ist auch $b^m < 1 < a$, also $b^m \neq a$.

Wäre andererseits $a < b$, so wäre auch $1 < a < b < b^m$ und somit wiederum $b^m \neq a$.

Wir brauchen also nur in dem Intervall $[1, a]$ nach einer Lösung zu suchen.

Daher beginnen wir mit $a_0 = 1$, $b_0 = a$.

Dann gilt $a_0^m = 1^m = 1 \leq a \leq a^m = b_0^m$.

Es sei $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ (der Mittelpunkt des Intervalls $[a_0, b_0]$).

Für c_1 sind zwei Fälle möglich:

(a) $c_1^m \leq a$ oder

(b) $c_1^m > a$.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$.

Es sei

$$a_1 = c_1 \text{ und } b_1 = b_0, \text{ falls } c_1^m \leq a \text{ und}$$

$$a_1 = a_0 \text{ und } b_1 = c_1, \text{ falls } c_1^m > a.$$

Dann gilt offenbar

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \text{ und } a_1^m \leq a \leq b_1^m.$$

Die gleichen Überlegungen werden im $(n+1)$ -ten Schritt angewendet. Die Ausführung des ersten Schrittes – wir haben mit dem 0-tem Schritt begonnen – ist natürlich bei dieser induktiven Definition nicht notwendig, da er als Spezialfall des $(n+1)$ -ten Schrittes auftritt. Er wurde hier nur des besseren Verständnisses wegen angegeben.

Für n seien a_n und b_n (nach Induktionsvoraussetzung) schon definiert und zwar mit den geforderten Eigenschaften:

$$a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \text{ und } a_n^m \leq a \leq b_n^m.$$

Wir betrachten jetzt $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ (den Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$).

Für c_{n+1} sind zwei Fälle möglich:

(a) $c_{n+1}^m \leq a$ oder

(b) $c_{n+1}^m > a$.

Entsprechend dieser beiden Fälle definiert man das $(n+1)$ -te Intervall wie folgt:

$$a_{n+1} = c_{n+1} \text{ und } b_{n+1} = b_n, \text{ falls } c_{n+1}^m \leq a \text{ und}$$

$$a_{n+1} = a_n \text{ und } b_{n+1} = c_{n+1}, \text{ falls } c_{n+1}^m > a.$$

Damit ist eine Intervallschachtelung mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein c , so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für jedes n .

Behauptung: $c^m = a$.

Der Beweis hierzu erfolgt indirekt.

Annahme: $c^m \neq a$.

Dann ist $c^m > a$ oder $c^m < a$. Wir betrachten den Fall $c^m > a$, den verbleibenden Fall beweist man völlig analog.

Wegen $c^m > a$ ist $d := c^m - a > 0$.

Es gilt

$$a_n^m \leq a \leq b_n^m \quad \text{und} \quad a_n^m \leq c^m \leq b_n^m.$$

Folglich ist

$$\underbrace{b_n^m}_{\geq c^m} - a_n^m \geq c^m + \underbrace{(-a_n^m)}_{\geq -a} \geq c^m - a = d.$$

Also

$$b_n^m - a_n^m \geq d > 0 \quad \text{für jedes } n.$$

Es sei jetzt $b_n - a_n = \delta_n$. Dann ist $a_n = b_n - \delta_n = b_n \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)$ und schließlich

$$b_n^m - a_n^m = b_n^m - b_n^m \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m := (\star).$$

Um diesen letzten Ausdruck weiter umformen zu können, benötigen wir noch einen wichtigen Hilfssatz.