

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. Der n -dimensionale Vektorraum \mathbb{R}^n zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt *n -dimensionaler euklidischer Raum*. 6/1/3

Definition. (*Beschränktheit*) 6/1/18

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M ist *beschränkt* (in \mathbb{M})

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{M}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $M \subseteq U_\varepsilon(a)$
(d.h., M ist in einer Kugel – mit endlichem Radius ε – enthalten; also für jedes $x \in M$ gilt:
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$; vgl. Abb. 6.3)

Definition. (*abgeschlossene Menge*) 6/1/26

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{M}$ ist *abgeschlossen*

$\overline{\text{Df}}$ Jeder Häufungspunkt von M gehört zu M .

Satz 6.6 *In metrischen Räumen gilt:* 6/1/29

- (1) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*
- (2) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*
- (3) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
- (4) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Korollar. (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*) 6/5/10

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

M ist *beschränkt und abgeschlossen* $\iff M$ ist *kompakt*.

Übungsaufgaben

14. A, B seien Teilmengen des \mathbb{R}^n . Zeigen Sie:

6/6/14

- (a) Sind A und B kompakt, dann ist auch $A \cup B$ kompakt.
- (b) Ist A kompakt und B abgeschlossen, dann ist $A \cap B$ kompakt.