

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Korollar. Ist $f(x, y)$ in D stetig (also auch integrierbar), dann ist

10/1/16

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Beispiel.

10/1/18

Sei $f(x, y) = x^2 + 2xy$ und $[a, b] = [0, 1]$, $[c, d] = [1, 3]$, also $D = [0, 1] \times [1, 3]$. Dann gilt (falls zuerst nach y und anschließend nach x integriert wird):

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_1^3 (x^2 + 2xy) \, dy \right) dx = \int_0^1 [x^2 y + xy^2]_1^3 \, dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 9x - x^2 - x) \, dx = \int_0^1 (2x^2 + 8x) \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Wir berechnen dasselbe Integral noch einmal (wobei jetzt zuerst nach x und anschließend nach y integriert wird).

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\int_0^1 (x^2 + 2xy) \, dx \right) dy &= \int_1^3 \left[\frac{x^3}{3} + x^2 y \right]_0^1 \, dy = \int_1^3 \left(\frac{1}{3} + y \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = 1 + \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Beide Methoden liefern also das gleiche Ergebnis.