

# Kapitel 1

## Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

### Induktionsaxiom:

Es sei  $E$  eine Eigenschaft für natürliche Zahlen  $n$ . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage  $\forall m E(m)$  zu beweisen, genügt es:

1.  $E(0)$  zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2.  $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$  nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und zeigt:

Wenn  $E(n)$ , so  $E(n+1)$ .

$E(n)$  heißt *Induktionsvoraussetzung*,  $E(n+1)$  *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a):  $E(n)$  ist falsch.

Dann ist die Implikation  $E(n) \rightarrow E(n+1)$  aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b):  $E(n)$  ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von  $E(n+1)$  zu zeigen.

**Achtung:** Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges  $n$  wird vorausgesetzt, daß  $E(n)$  schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

## Übungsaufgaben

16. Es sei  $a$  eine reelle Zahl mit  $a \neq 0$ .

Zeigen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$