

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (Zerlegung)

9/2/1

\mathfrak{z} ist eine Zerlegung (oder *Partition*) von I

$\stackrel{\text{Def}}{=} \mathfrak{z}$ ist eine endliche Folge (a_0, \dots, a_{n+1}) von reellen Zahlen a_0, \dots, a_{n+1} , so daß
 $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$.

Die Elemente a_0, \dots, a_{n+1} heißen dann *Unterteilungspunkte* von \mathfrak{z} ,

9/2/2

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$ bezeichne das i -te Teilintervall bezüglich \mathfrak{z} , und

$d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$ heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitmaß*, ...) von \mathfrak{z} .

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes* (*Riemann-*) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Definition. (*Zwischensumme*)

9/3/4

Es sei f in I definiert, $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I , und für jedes $i = 1, \dots, n$ sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Dann nennt man $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung \mathfrak{z} , und

$S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$ heißt *Zwischensumme* von f bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem τ .

Bemerkung. Ist f in I definiert und beschränkt, dann gilt für $\xi \in [a_i, a_{i+1}] := I_i$ stets $\inf_{x \in I_i} f(x) \leq f(\xi) \leq \sup_{x \in I_i} f(x)$ und somit auch

9/3/5

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq S_f(\mathfrak{z}, \tau) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

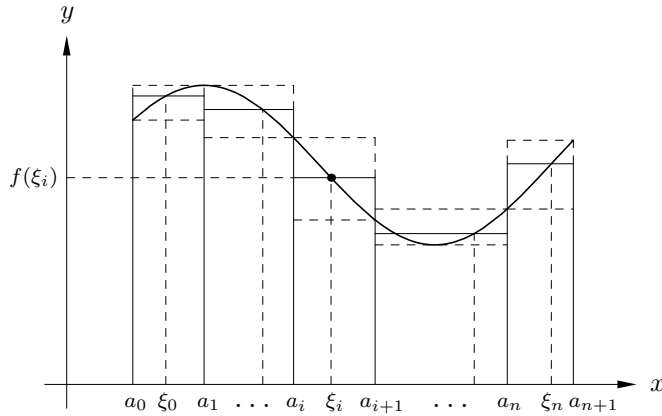


Abb. 9.8 Die Summe der Flächeninhalte der hervorgehobenen Rechtecke bildet die Zwischensumme von f bei der angegebenen Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem $\tau := (\xi_0, \dots, \xi_n)$. Die Abbildung zeigt auch, daß die Zwischensumme zwischen der Unter- und der Ober-summe liegt.

Satz 9.9 Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt:
 f ist in I integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) und jede Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen τ_ν gilt:

9/3/6

Es existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ (und der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b f(x) dx$.)

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 9.13 Seien f und g in I integrierbar. Dann gilt:

9/4/8

(1) Ist $h(x) = c$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b h(x) dx = c(b - a)$.

(2) Sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$ in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

(3) $f \cdot g$ ist in I integrierbar.

(4) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und ist $\frac{1}{g}$ beschränkt in I , dann ist $\frac{1}{g}$ in I integrierbar.

(Zusammen mit (3) erhält man sofort die Integrierbarkeit von $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ in I).

(5) $|f|$ ist in I integrierbar, und es ist $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

9.6 Volumen von Rotationskörpern

Wir wenden uns jetzt der Bestimmung des Volumens eines sogenannten *Rotationskörpers* zu. Zunächst soll aber definiert werden, was unter einem solchen Körper zu verstehen ist.

9/6/0

Dazu sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und sei f eine in I definierte und integrierbare Funktion, die in dem Intervall nicht negativ wird. Dann bestimmt die Punktmenge

$$M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bekanntlich eine Fläche. Läßt man nun diese Fläche um die x -Achse rotieren, dann entsteht eine *Rotationsfigur* oder ein *Rotationskörper* (vgl. Abb. 9.13).

Wir interessieren uns nun für die Frage, ob man diesem Rotationskörper in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zuschreiben kann, und wie man gegebenenfalls dieses Volumen definieren und berechnen könnte.

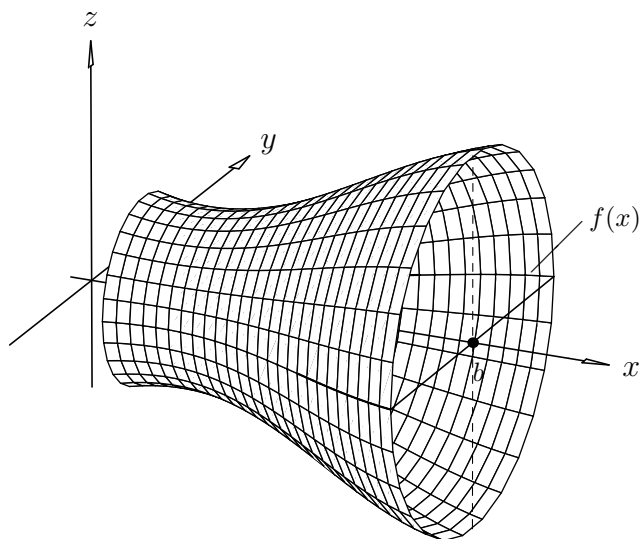


Abb. 9.13 Auf der x -Achse sei ein Intervall $[a, b]$ gegeben, und in diesem Intervall sei eine nicht-negative Funktion $f(x)$ definiert (a ist hier verdeckt). f wird in der (x, y) -Ebene betrachtet. Läßt man f um die x -Achse rotieren, dann entsteht im \mathbb{R}^3 eine Rotationsfigur.

Das Problem ist aufgeworfen, wir versuchen es zu lösen.

Dazu sei $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I . Parallele Ebenen im \mathbb{R}^3 , die zur x -Achse senkrecht stehen und durch die jeweiligen Zerlegungspunkte auf der x -Achse gehen, schneiden aus der Rotationsfigur Kreisscheiben heraus. Das angenäherte Volumen der Kreisscheibe, die durch die Zerlegungspunkte a_i und a_{i+1} bestimmt wird, kann durch einen geeigneten Kreiszylinder angegeben werden. Dazu sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ beliebig. Dann ist durch $(a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$ das Volumen des entsprechenden Zylinders

mit der Höhe $h = a_{i+1} - a_i$ und dem Radius $f(\xi_i)$ gegeben. ξ_i ist eine Zwischenstelle in $[a_i, a_{i+1}]$ (vgl. Abb. 9.8). Entsprechend dieser Überlegung ist durch

$$\tilde{V} = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$$

das angenäherte Volumen der gesamten Rotationsfigur bestimmt. Diese Summe ist offensichtlich eine Zwischensumme der Funktion $\pi \cdot f^2(x)$ bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$. Nach Voraussetzung ist f in I integrierbar, folglich ist auch πf^2 in I integrierbar.

Betrachtet man jetzt eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) von I und eine Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen, dann existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$, und

der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b \pi f^2(x) dx$.

Daher definiert man das Volumen V der Punktmenge M wie folgt:

$$V \stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$