

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Wie für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen vereinbaren wir, daß eine Funktion f in einer Menge $M \subseteq \mathbb{M}_1$ stetig ist, wenn sie in jedem Punkt der Menge stetig ist.

6/2/3

Ist z.B. $\mathbb{M}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R}$ (mit dem euklidischen Abstand als Metrik) und ist $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, dann erhält man:

f ist in \bar{a} stetig $\iff \bar{a} \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in D(f)$ gilt: Wenn $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$, so $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

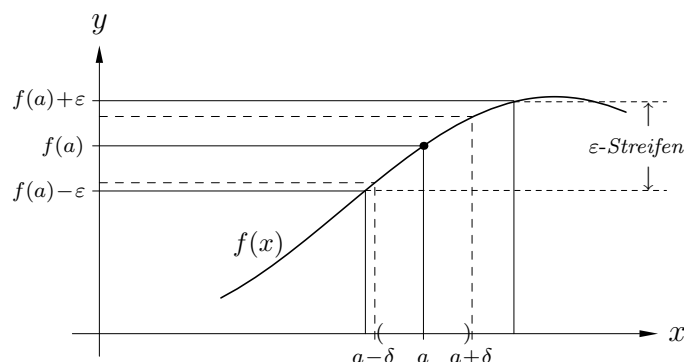


Abb. 6.8 a Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$; d.h., die Funktionswerte von f , eingeschränkt auf $U_\delta(a)$, liegen alle in dem ε -Streifen um $f(a)$.

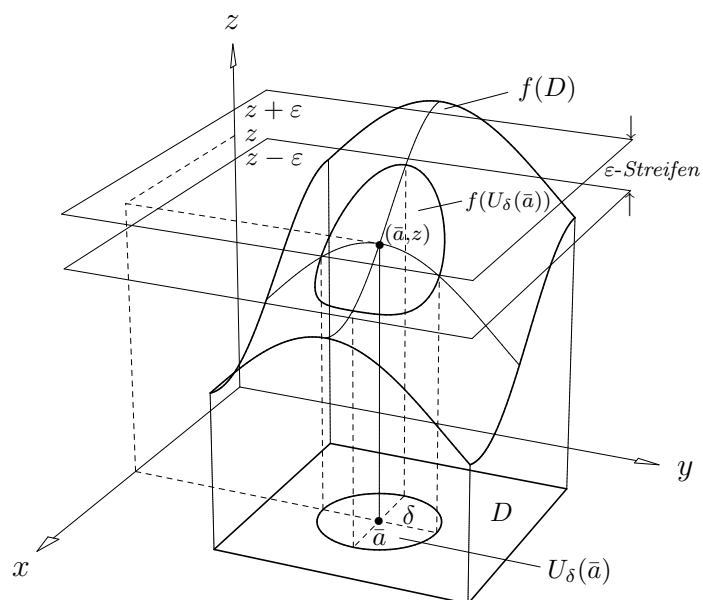


Abb. 6.8 b Ähnlich wie in der Abb. 6.6 betrachten wir eine Funktion f , die in dem Rechteckbereich D definiert ist. Weiterhin sei $\bar{a} \in D$, $f(\bar{a}) = z$ und $\epsilon > 0$. Analog wie in der Abb. 6.8 a liegen die Funktionswerte von f , eingeschränkt auf $U_\delta(\bar{a})$, zwischen den beiden Ebenen, die parallel zur x - y -Ebene sind und durch die Punkte $(0, 0, z - \epsilon)$ bzw. $(0, 0, z + \epsilon)$ verlaufen.