

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Wir betrachten den n -dimensionalen Vektorraum

6/1/0

$$\mathbb{R}^n := \{\bar{a} : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}, \quad \bar{a} := (a_1, \dots, a_n),$$

über \mathbb{R} mit den folgenden Operationen:

Addition in \mathbb{R}^n : $\bar{a} + \bar{b} \stackrel{\text{Df}}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$

Multiplikation mit $r \in \mathbb{R}$: $r \cdot \bar{a} \stackrel{\text{Df}}{=} (ra_1, \dots, ra_n).$

Definition. (*euklidischer Abstand*)

6/1/1

Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

$|\bar{a} - \bar{b}| \stackrel{\text{Df}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$ heißt *euklidischer Abstand* zwischen \bar{a} und \bar{b} .

Bemerkung. Für $\bar{b} = \bar{0}$ erhält man $|\bar{a} - \bar{0}| = |\bar{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$

6/1/2

$|\bar{a}|$ ist also der Abstand zwischen \bar{a} und $\bar{0}$ und heißt *Länge des Vektors \bar{a}* oder auch *Betrag* von \bar{a} .

Definition. Der n -dimensionale Vektorraum \mathbb{R}^n zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt *n -dimensionaler euklidischer Raum*.

6/1/3

Wir werden den euklidischen Raum ebenfalls mit \mathbb{R}^n bezeichnen.

6/1/4

Offensichtlich sind die Körper der reellen bzw. der komplexen Zahlen Spezialfälle für ein- bzw. zweidimensionale euklidische Räume.

Satz 6.1 (*Schwarzsche Ungleichung*)

6/1/5

Für beliebige reelle Zahlen a_i, b_i gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Beweis. In der linearen Algebra definiert man das Skalarprodukt für Vektoren

6/1/6

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ wie folgt: $(\bar{a}, \bar{b}) := \sum_{i=1}^n a_i b_i.$

Man überlegt sich leicht, daß das so definierte Skalarprodukt folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{a}) &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0, \quad \text{und} \quad (\bar{a}, \bar{a}) > 0, \quad \text{falls} \quad \bar{a} \neq \bar{0}, \\ (\bar{a}, \bar{b}) &= (\bar{b}, \bar{a}), \end{aligned}$$

$$(\bar{a} + \bar{c}, \bar{b} + \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{d}) + (\bar{c}, \bar{b}) + (\bar{c}, \bar{d}),$$

$$(r \cdot \bar{a}, \bar{b}) = r \cdot (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, r \cdot \bar{b}) \text{ für alle } r \in \mathbb{R}.$$

Für beliebige $r \in \mathbb{R}$ erhält man hieraus

$$0 \leq (r \cdot \bar{a} + \bar{b}, r \cdot \bar{a} + \bar{b}) = r^2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b}).$$

Für $\bar{a} = \bar{0}$ ist die Schwarzsche Ungleichung offenbar richtig.

Es sei jetzt $\bar{a} \neq \bar{0}$ und damit $(\bar{a}, \bar{a}) > 0$. Wählt man speziell $r = -\frac{(\bar{a}, \bar{b})}{(\bar{a}, \bar{a})}$, dann erhält man

$$0 \leq \frac{(\bar{a}, \bar{b})^2}{(\bar{a}, \bar{a})} - \frac{2(\bar{a}, \bar{b})^2}{(\bar{a}, \bar{a})} + (\bar{b}, \bar{b}) = -\frac{(\bar{a}, \bar{b})^2}{(\bar{a}, \bar{a})} + (\bar{b}, \bar{b}).$$

Folglich ist

$$(\bar{a}, \bar{b}) \leq (\bar{a}, \bar{a}) \cdot (\bar{b}, \bar{b}),$$

und dies ist die Schwarzsche Ungleichung in etwas veränderter Schreibweise. \square

Satz 6.2 Für alle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

6/1/7

- (1) $|\bar{a}| \geq 0$, und $|\bar{a}| = 0 \iff \bar{a} = \bar{0}$.
 - (2) $|r \cdot \bar{a}| = |r| \cdot |\bar{a}|$.
 $(\implies |-\bar{a}| = |\bar{a}| \text{ und } |\bar{a} - \bar{b}| = |\bar{b} - \bar{a}|).$ (Symmetrie des Abstands)
 - (3) $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$. (Dreiecksungleichung)
 - (4) $|\bar{a} - \bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{c}| + |\bar{c} - \bar{b}|,$
 - (5) $||\bar{a}| - |\bar{b}|| \leq |\bar{a} - \bar{b}|.$
- } (Formen der Dreiecksungleichung)

Beweis. (1) und (2) sind trivial (analog wie für komplexe Zahlen).

6/1/8

(3) wird mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung bewiesen (analog wie für komplexe Zahlen).

(4) und (5) folgen aus (3) wie bei den reellen Zahlen. \square

Bemerkung. Unser Ziel ist es, in euklidischen Räumen Analysis zu betreiben (tiefergehende analytische Betrachtungen erfordern noch allgemeinere Räume, dies würde aber den Rahmen dieser Darstellung sprengen). Unabhängig von den betrachteten Räumen benötigt man bei einer ganzen Reihe von Grundbegriffen der Analysis weder Zahlen noch Tupel von Zahlen, oft reicht eine Menge ($:=$ Punktmenge) und eine Abstandsdefinition zwischen den Punkten der Menge aus, um grundlegende Begriffe definieren zu können. Wenn dann in den konkreten Räumen, die wir betrachten (z.B. \mathbb{R}^n für die verschiedenen n), ein Abstand definiert ist, so sind in diesen Räumen schon alle Begriffe gegeben, die allein mit dem Abstand definiert werden können. Die Konvergenz von Folgen ist z.B. ein solcher Begriff, der sich allein auf den Abstand zurückführen läßt. Um nicht in jedem

6/1/9

euklidischen Raum die Konvergenz und andere Definitionen neu formulieren zu müssen, betrachten wir sog. *metrische Räume* (das sind Punktmengen mit einem Abstand).

Definition. (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei \mathbb{M} eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

- (1) $\varrho(a, b) \geq 0$, und $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$.
- (2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Symmetrie)
- (3) $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in \mathbb{M} , und das Paar (\mathbb{M}, ϱ) heißt *metrischer Raum*.

Bemerkung. Wir werden den metrischen Raum (\mathbb{M}, ϱ) wie üblich auch einfach mit \mathbb{M} bezeichnen.

6/1/11

Offenbar hat der in $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ definierte Abstand die Eigenschaften (1) – (3). Folglich sind $(\mathbb{R}, |\cdots|)$, $(\mathbb{C}, |\cdots|)$, $(\mathbb{R}^n, |\cdots|)$ oder kurz $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ metrische Räume.

Im folgenden sei (\mathbb{M}, ϱ) bzw. \mathbb{M} stets ein metrischer Raum.

Definition. (ε -Umgebung)

6/1/12

Es sei $a \in \mathbb{M}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

$U_\varepsilon(a)$ heißt ε -Umgebung von a (in \mathbb{M})

$\stackrel{\text{Df}}{=} U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{M} : \varrho(x, a) < \varepsilon\}$.

Ist z.B. $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, so ist $U_\varepsilon(\bar{a}) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon\}$ eine n -dimensionale offene Kugel in \mathbb{R}^n mit dem Radius ε und dem Mittelpunkt \bar{a} . Für $n = 1, 2$ erhält man ein offenes Intervall in \mathbb{R} bzw. eine offene Kreisscheibe (:=Kreis ohne Rand) in der Ebene (vgl. Abb. 6.1).

6/1/13

Definition. (*offene Menge*)

6/1/14

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M heißt *offen* (in \mathbb{M})

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0, \text{ so daß } U_\varepsilon(a) \subseteq M.$

(Mit jedem $a \in M$ gehört noch eine ganze ε -Umgebung zu M , vgl. auch Abb. 6.2.)

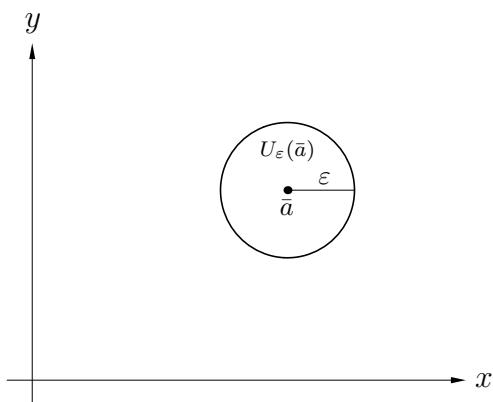


Abb. 6.1 zeigt eine ε -Umgebung in \mathbb{R}^2 . Die Menge $\{\bar{x} : |\bar{x} - \bar{a}| = \varepsilon\}$ gehört **nicht** zu $U_\varepsilon(\bar{a})$.

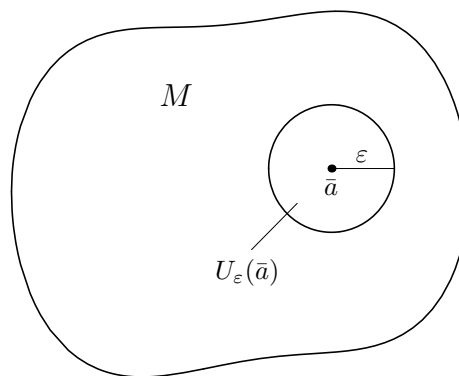


Abb. 6.2 Zu jedem $\bar{a} \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß auch noch $U_\varepsilon(\bar{a})$ zu der Menge M gehört.

Definition. (*Umgebung*)

Es sei $a \in \mathbb{M}$ und $U \subseteq \mathbb{M}$.

(1) U ist eine *offene Umgebung* von a

$\overline{\text{Df}}$ U ist offen und $a \in U$.

(2) U ist eine *Umgebung* von a

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{M}$ mit $a \in U'$ und $U' \subseteq U$.

Bez.: $U := U(a)$

Bemerkung. Im praktischen Umgang kommt man fast immer mit den spezielleren ε -Umgebungen aus, denn jede ε -Umgebung ist eine Umgebung, und in jeder Umgebung von a ist eine ε -Umgebung von a enthalten (und dies reicht in der Regel aus). Es ist aber oft bequem, einfach von Umgebungen zu sprechen.

Definition. (*Beschränktheit*)

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$.

M ist *beschränkt* (in \mathbb{M})

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{M}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $M \subseteq U_\varepsilon(a)$

(d.h., M ist in einer Kugel – mit endlichem Radius ε – enthalten; also für jedes $x \in M$ gilt:

$\varrho(x, a) < \varepsilon$; vgl. Abb. 6.3)

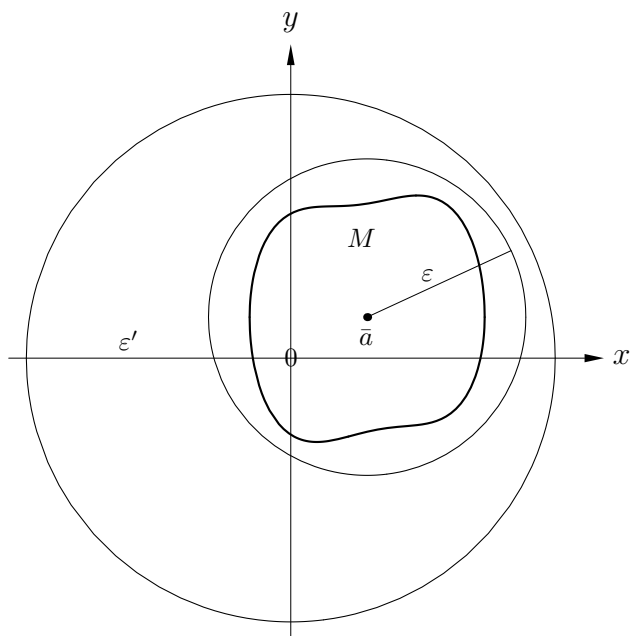


Abb. 6.3 Ist $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$, dann gibt es ein $\bar{a} \in M$, so daß $M \subseteq U_\varepsilon(\bar{a}) = \{\bar{x} : |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon\}$. Da \mathbb{R}^n ein Null-element enthält, kann in \mathbb{R}^n stets $\bar{a} = \bar{0}$ gewählt werden (in beliebigen metrischen Räumen existiert keine Null!). Also $M \subseteq U_{\varepsilon'}(\bar{0})$ und somit $|\bar{x}| < \varepsilon'$ für jedes $\bar{x} \in M$.

Definition. (*Häufungspunkt*)

6/1/20

Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $a \in \mathbb{M}$.

a ist ein *Häufungspunkt* von M

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ In jeder Umgebung von a liegt noch wenigstens ein von a verschiedener Punkt aus M .

Satz 6.3 Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$. Ist a ein Häufungspunkt von M , dann liegen in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte aus M . 6/1/21

Beweis. Der Beweis erfolgt analog wie für die reellen Zahlen (vgl. Satz 2.9). \square 6/1/22

Es sei jetzt $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ und $\varrho := |\cdots|$. 6/1/23

Satz 6.4 (*Satz von Bolzano-Weierstraß*) 6/1/24

Jede unendliche und beschränkte Menge von Elementen aus \mathbb{R}^n besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit einer sog. Würfelschachtelung, die analog zu einer Intervallschachtelung induktiv konstruiert wird). 6/1/25

Beweisidee: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und M unendlich und beschränkt. Dann läßt sich M in eine Kugel und damit auch in einen n -dimensionalen Würfel $W_0 := [a_1^0, b_1^0] \times \cdots \times [a_n^0, b_n^0]$ mit endlicher Kantenlänge einschließen, wobei $a_i^0, b_i^0 \in \mathbb{R}$, $a_i^0 < b_i^0$ und $b_i^0 - a_i^0 = b_j^0 - a_j^0$ für $i, j = 1, \dots, n$. Es gilt also $M \subseteq W_0$.

Die Kanten des Würfels werden durch die Intervalle $[a_i^0, b_i^0]$ auf den Koordinatenachsen repräsentiert (vgl. Abb. 6.4).

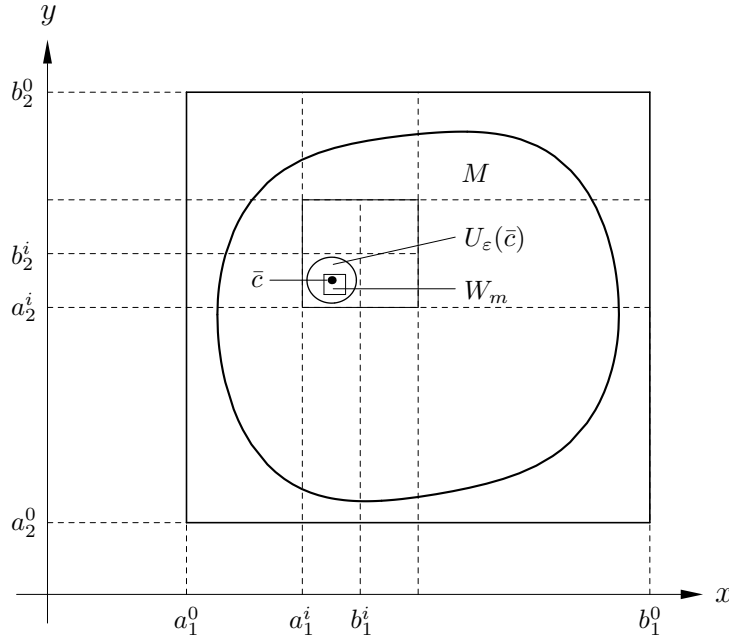


Abb. 6.4 In der Abbildung wird der Fall $n = 2$ dargestellt. Aufgrund der betrachteten Zerlegung gibt es bei jedem Schritt wenigstens einen Teilwürfel, in dem unendlich viele Elemente aus M enthalten sind; einen solchen Teilwürfel wählt man jeweils aus und zerlegt ihn weiter. Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es dann einen Teilwürfel W_m , so daß $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$.

Durch Halbierung der Würfelkanten entsteht eine Zerlegung von W_0 in endlich viele Teilwürfel W_0^1, \dots, W_0^k , (in unserem Fall ist $k = 2^n$) und $W_0 = \bigcup_{i=1}^k W_0^i$.

Dann ist

$$M \cap W_0 = M \cap \left(\bigcup_{i=1}^k W_0^i \right) = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_0^i)$$

unendlich. Folglich gibt es einen Teilwürfel W_0^i , so daß schon $M \cap W_0^i$ unendlich ist. Wir wählen einen solchen Teilwürfel W_0^i aus und nennen ihn W_1 .

Es sei jetzt W_m schon definiert mit den folgenden Eigenschaften:

Die Kantenlänge von W_m ist $l(W_m) = \frac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$ und $M \cap W_m$ ist unendlich.

Analog wie bei W_0 halbieren wir jetzt die Kanten von W_m und erhalten eine Zerlegung von W_m in k Teilwürfel W_m^1, \dots, W_m^k , so daß

$$W_m = \bigcup_{i=1}^k W_m^i \quad \text{und} \quad M \cap W_m = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_m^i).$$

Da nach Voraussetzung $M \cap W_m$ unendlich ist, existiert ein W_m^i , so daß $M \cap W_m^i$ unendlich ist; sei $W_{m+1} := W_m^i$.

Auf diese Weise entsteht eine Folge $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_m \supseteq \dots$ von ineinander geschachtelten Würfeln. Für den Würfel W_m sei die j -te Würfelkante ($j = 1, \dots, n$) durch das Intervall $[a_j^m, b_j^m]$ gegeben. Offenbar ist $([a_j^m, b_j^m])_{m=0,1,2,\dots}$ dann eine Intervallschachtelung in \mathbb{R} . Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein c_j , so daß $c_j \in [a_j^m, b_j^m]$ für fixiertes j mit $j \in \{1, \dots, n\}$ und $m = 0, 1, 2, \dots$.

Behauptung: $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ ist ein Häufungspunkt von M .

Offenbar ist $\bar{c} \in \bigcap_{m=0}^{\infty} W_m$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $l(W_m) = \frac{1}{2^m} \cdot l(W_0)$ kann mit wachsendem m die Kantenlänge des m -ten Würfels so klein gemacht werden, daß für hinreichend große m der ganze Würfel W_m zu $U_\varepsilon(\bar{c})$ gehört: $W_m \subseteq U_\varepsilon(\bar{c})$. Da $M \cap W_m \subseteq W_m$ und $M \cap W_m$ unendlich ist, liegen in $U_\varepsilon(\bar{c})$ unendlich viele Elemente aus M ; folglich ist \bar{c} ein Häufungspunkt von M . \square

Definition. (*abgeschlossene Menge*)

6/1/26

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{M}$ ist *abgeschlossen*

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Jeder Häufungspunkt von M gehört zu M .

Satz 6.5 Es sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $C(M)$ das Komplement von M bez. \mathbb{M} .

6/1/27

Dann gilt: M ist offen gdw $C(M)$ abgeschlossen ist.

Beweis. (\longrightarrow) Sei M offen und a ein Häufungspunkt von $C(M)$.

6/1/28

z.z.: $a \in C(M)$.

Annahme: $a \notin C(M)$ ($\implies a \in M$).

Da M offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq M$. Dann enthält $U_\varepsilon(a)$ keinen Punkt aus $C(M)$, folglich ist a kein Häufungspunkt von $C(M)$. $\nexists!$

(\longleftarrow) Sei $C(M)$ abgeschlossen und $a \in M$.

z.z.: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq M$.

Annahme: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(a) \not\subseteq M$,

d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in U_\varepsilon(a)$ mit $x \notin M$, also $x \in C(M)$. Wegen $a \in M$ ist $x \neq a$. Folglich gibt es in jeder ε -Umgebung von a ein von a verschiedenes Element aus $C(M)$; somit ist a ein Häufungspunkt von $C(M)$. Da $C(M)$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, muß a zu $C(M)$ gehören. $\nexists!$ \square

Satz 6.6 In metrischen Räumen gilt:

6/1/29

- (1) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.
- (2) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.
- (3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- (4) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Beweis. Übungsaufgabe!

6/1/30

Hinweise:

- (1). Sei I eine Indexmenge und sei M_i für jedes $i \in I$ offen.

z.z.: $\bigcup_{i \in I} M_i$ ist offen.

(2). Analog zu (1), aber I endlich.

(3) und (4) folgen aus (1) und (2) mit Hilfe der *de Morganschen Formeln*:

$$C\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} C(M_i) \quad \text{und} \quad C\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} C(M_i) \quad (\text{vgl. Aufgabe 3, Kapitel 1}). \quad \square$$

Weitere topologische Grundbegriffe

6/1/31

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{M}$ und $a \in \mathbb{M}$.

6/1/32

(1) a ist ein *innerer Punkt* von M

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(a)$, die ganz zu M gehört.

(2) a ist ein *Randpunkt* von M

$\overline{\text{Df}}$ In jeder Umgebung von a existiert ein Punkt aus M und ein Punkt, der nicht zu M gehört.

(3) a ist ein *isolierter Punkt* von M

$\overline{\text{Df}}$ $a \in M$ und es gibt eine Umgebung von a , die außer a keinen weiteren Punkt aus M enthält.

6/1/33

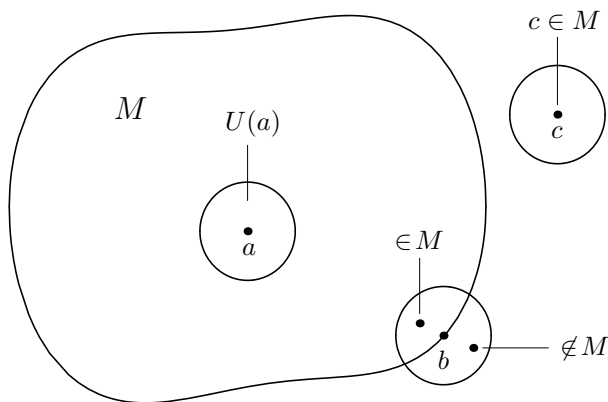


Abb. 6.5 a ist ein innerer Punkt von M , da mit a noch eine ganze Umgebung von a zu M gehört. b ist ein Randpunkt von M , denn in jeder Umgebung von b liegt ein Punkt aus M und ein Punkt, der nicht zu M gehört. c ist isolierter Punkt von M , denn $c \in M$, und es gibt eine Umgebung von c , in der kein weiterer Punkt aus M liegt.

Bemerkungen.

(1) Randpunkte von M müssen nicht zu M gehören.

(2) M ist offen gdw jeder Punkt aus M innerer Punkt von M ist.

(3) M ist abgeschlossen gdw der *Rand* von M ($:=$ Menge aller Randpunkte von M) zu M gehört.

(4) Nicht jede Menge ist offen oder abgeschlossen.

(5) Es gibt Mengen, die offen und abgeschlossen sind.

Beweis. (1). Beispiel: Das Intervall $M = (0, 1)$ in \mathbb{R} .

6/1/34

(2) ist nach Definition trivial.

(3). Randpunkte sind offenbar Häufungspunkte oder isolierte Punkte. Daraus folgt die

Behauptung.

(4). Beispiel: $\mathbb{M} = \mathbb{R}$ und $M = [0, 1)$.

(5). Beispiel: $\mathbb{M} = \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{R}$ oder $M = \emptyset$. \square

Wir betrachten jetzt Folgen (x_n) in \mathbb{M} , d.h., für jede natürliche Zahl n ist $x_n \in \mathbb{M}$.

Definition. (Konvergenz in metrischen Räumen)

6/1/35

Sei (x_n) eine Folge in \mathbb{M} und $a \in \mathbb{M}$.

(x_n) konvergiert gegen a (in \mathbb{M})

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } n_0, \text{ so daß für jedes } n \geq n_0 \text{ gilt: } \varrho(x_n, a) < \varepsilon$
(d.h., für fast alle n ist der Abstand zwischen x_n und a kleiner als ε , oder in jeder ε -Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder).

Bez.: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ oder kurz $x_n \rightarrow a$.

Damit ist der Begriff der Konvergenz in metrischen Räumen definiert. Betrachtet man also einen speziellen metrischen Raum, etwa \mathbb{R} oder \mathbb{R}^n dann muß man dort die Konvergenz nicht neu definieren.

6/1/36

Es sei jetzt $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ und (\bar{x}_i) eine Folge in \mathbb{R}^n , also $\bar{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})$ (n fixiert und $i = 0, 1, 2, \dots$), und es sei $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

Satz 6.7 Ist (\bar{x}_i) eine Folge in \mathbb{R}^n und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

6/1/37

(\bar{x}_i) konvergiert gegen $\bar{a} \iff \text{für jedes } k = 1, \dots, n \text{ konvergiert } (x_{ki})_{i=0,1,2,\dots} \text{ gegen } a_k.$ (D.h., Konvergenz in \mathbb{R}^n ist komponentenweise Konvergenz.)

Beweis. Übungsaufgabe! \square

6/1/38

Damit übertragen sich sehr viele Konvergenzeigenschaften für Folgen in \mathbb{R} auf Folgen in \mathbb{R}^n ; insbesondere gilt:

6/1/39

Ist (\bar{x}_i) in \mathbb{R}^n beschränkt ($:=$ die Menge $\{\bar{x}_i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ ist beschränkt), dann existiert ein Häufungspunkt \bar{a} von (\bar{x}_i) und eine Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) von (\bar{x}_i) , die gegen \bar{a} konvergiert.