

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Definition. (*einfacher Bereich*)

10/1/20

Es seien $[a, b], [c, d]$ Intervalle in \mathbb{R} .

1. B ist ein *x-einfacher Bereich* (über $[a, b]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ, ψ sind stetig in $[a, b]$,
 - (b) $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für jedes $x \in [a, b]$,
 - (c) $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ (vgl. Abb. 10.4).
2. B_1 ist ein *y-einfacher Bereich* (über $[c, d]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ_1, ψ_1 sind stetig in $[c, d]$,
 - (b) $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$ für jedes $y \in [c, d]$,
 - (c) $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$ (vgl. Abb. 10.5).
3. B ist ein *einfacher Bereich*
 $\overline{\text{Df}}$ B ist *x-einfach* oder *y-einfach*.

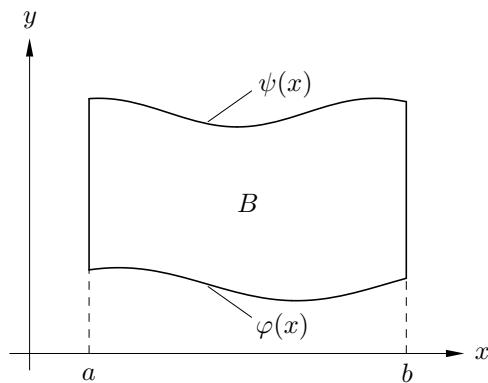


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen *x*-einfachen Bereich B .

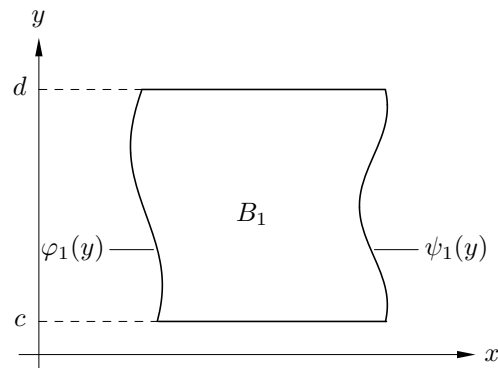


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen *y*-einfachen Bereich B_1 .

Definition. (*Integral über einfachen Bereichen*)

10/1/24

Es sei B ein einfacher Bereich und D ein entsprechender Rechteckbereich, so daß $B \subseteq D$. $f(x, y) : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei in B stetig und f^* wie oben definiert.

f ist in B integrierbar $\overline{\text{Df}}$ f^* ist in D integrierbar, und

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \iint_D f^*(x, y) \, dx dy.$$

$\iint_B f(x, y) \, dx dy$ heißt dann *Doppelintegral* (oder kurz *Integral*) über B .

Integrale über „komplizierteren“ Bereichen

10/1/29

Definition. (*Doppelintegral*)

Es seien B_1, \dots, B_k x -einfache bzw. y -einfache Bereiche, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, und es sei $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Weiterhin sei $f(x, y)$ im Inneren von jedem B_i stetig.

Dann vereinbaren wir:

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^k \iint_{B_i} f(x, y) \, dx dy.$$

$\iint_B f(x, y) \, dx dy$ heißt *Doppelintegral* (oder kurz *Integral*) von f über B .

10.2 Dreifachintegrale

Einfache Bereiche in \mathbb{R}^3

10/2/12

Es sei $[a_1, b_1]$ ein Intervall in \mathbb{R} , $\varphi_1, \psi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien in $[a_1, b_1]$ stetig, und es sei $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in [a_1, b_1]$. Dann ist

$$B' := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$$

ein x -einfacher Bereich in \mathbb{R}^2 (d.h. in der (x, y) -Ebene). Weiterhin seien φ_2, ψ_2 stetige Funktionen von B' in \mathbb{R} , und für alle $(x, y) \in B'$ gelte stets $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$. Dann heißt

$$B := \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

einfacher Bereich in \mathbb{R}^3 .

Da die Variablen x, y, z hierbei gleichberechtigt sind, hätte man auch mit y oder z beginnen können. Die Entscheidung darüber, mit welcher der Variablen man beginnt, wird vernünftigerweise so getroffen, daß sich die anschließende Integration am einfachsten gestaltet.

Betrachtet man zunächst einen y -einfachen Bereich B' , dann startet man mit einem Intervall $[a_2, b_2]$ und entsprechenden stetigen Funktionen $\varphi_1, \psi_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y)$ für alle $y \in [a_2, b_2]$. Dann ist

$$B' = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), a_2 \leq y \leq b_2\} \quad \text{und}$$

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

In der folgenden Abbildung ist B' ein y -einfacher Bereich und B ein einfacher dreidimensionaler Bereich.

Wir werden jetzt Dreifachintegrale auf einfachen Bereichen definieren.

10/2/14

Dazu sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader und $B \subseteq D$ ein einfacher Bereich; o.B.d.A. gehen wir von einem x -einfachen Bereich B' über $[a_1, b_1]$ aus.

Sei $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in B definiert und stetig und

$$f^*(\bar{x}) \stackrel{\text{Df}}{=} \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{für } \bar{x} \in B, \\ 0, & \text{für } \bar{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $x \in [a_1, b_1]$:

wenn $a_2 \leq y < \varphi_1(x)$, so $f^*(\bar{x}) = 0$,

wenn $\varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)$, so $f^*(\bar{x}) = f(\bar{x})$,

wenn $\psi_1(x) < y \leq b_2$, so $f^*(\bar{x}) = 0$.

Für jedes $y \in [a_2, b_2]$ erhält man:

wenn $a_3 \leq z < \varphi_2(x, y)$, so $f^*(\bar{x}) = 0$,

wenn $\varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$, so $f^*(\bar{x}) = f(\bar{x})$,

wenn $\psi_2(x, y) < z \leq b_3$, so $f^*(\bar{x}) = 0$.

Definition. (*Dreifachintegral über einfachen Bereichen*)

10/2/18

Es sei B ein einfacher Bereich und D ein Quader, so daß $B \subseteq D$.

$f(x, y, z) : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei in B stetig und f^* wie oben definiert.

f ist in B integrierbar $\stackrel{\text{Df}}{=} f^*$ ist in D integrierbar, und

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{Df}}{=} \iiint_D f^*(x, y, z) dx dy dz.$$

$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$ heißt dann *Dreifachintegral* (oder kurz *Integral*) von f über B .

Bemerkung. Völlig analog lassen sich auch n -fache *Integrale* definieren.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 10

- Definitionen: einfacher Bereich, Integrale über einfachen Bereichen,

10/4/5