

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.11 Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3) $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, und
für $x > 0$ ist $1 < \exp(x)$.
- (4) \exp ist streng monoton wachsend
(folglich ist \exp injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5) $\exp(1) = e$ ($e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).
- (6) Für rationale $x = \pm \frac{m}{n}$ ist $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$
(für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).
- (7) \exp ist stetig.

Satz 5.12 Für e^x gilt:

5/3/24

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- (2) e^x nimmt jeden Wert $y > 0$ genau einmal an
($\Rightarrow W(e^x) = \{y : y > 0\} = (0, \infty)$).

Satz 5.13 \ln hat folgende Eigenschaften:

5/3/29

- (1) $\ln e = 1$, $\ln e^x = x$ und $e^{\ln x} = x$.
- (2) \ln ist stetig.
- (3) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus).
- (4) $\ln 1 = 0$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$;
für $0 < x < 1$ ist $\ln x < 0$, und für $1 < x$ ist $0 < \ln x$.
- (5) \ln ist streng monoton wachsend.
- (6) Für rationale r und reelle $x > 0$ gilt: $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$
(für irrationale r ist x^r noch nicht definiert!).
- (7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich leicht aus den Eigenschaften von e^x .
Als Beispiel zeigen wir (3).

5/3/30

Annahme: $\ln(x \cdot y) \neq \ln x + \ln y$.

Aus der Injektivität von e^x folgt dann

$$x \cdot y = e^{\ln(x \cdot y)} \neq e^{\ln x + \ln y} = \underbrace{e^{\ln x}}_{=x} \cdot \underbrace{e^{\ln y}}_{=y} = x \cdot y \quad \text{!} \quad \square$$