

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.8 Länge von Kurven

Zur Erinnerung:  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  ist eine Kurve in  $\mathbb{R}^k$ , falls  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine stetige Vektorfunktion ist. 9/8/0

**Definition.** (*doppelpunktfrei*)

9/8/1

$\mathfrak{k}$  ist *doppelpunktfrei*

$\overline{\text{Df}}$  für jedes  $t_1, t_2 \in [a, b]$  mit  $t_1 < t_2$  und  $t_1 \neq a$  oder  $t_2 \neq b$  gilt  $f(t_1) \neq f(t_2)$ .

Eine doppelpunktfreie Kurve heißt auch *Jordan-Kurve*.

Ist in der obigen Darstellung  $f(a) = f(b)$ , dann heißt  $\mathfrak{k}$  *geschlossene Kurve*.

**Beispiele.** Wir geben jetzt einige wichtige Beispiele von Kurven an (vgl. auch die Abbildungen 6.9 und 6.10 aus dem Kapitel 6). 9/8/2

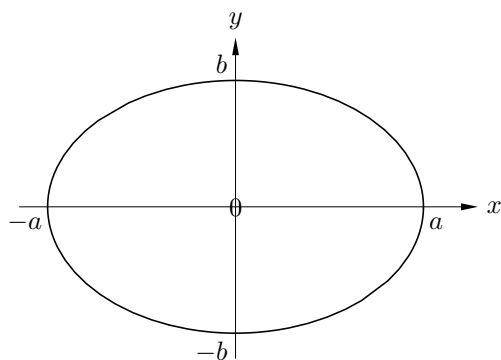


Abb. 9.20 Durch  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$  ist eine Ellipse definiert. Für  $a = b$  entsteht ein Kreis.

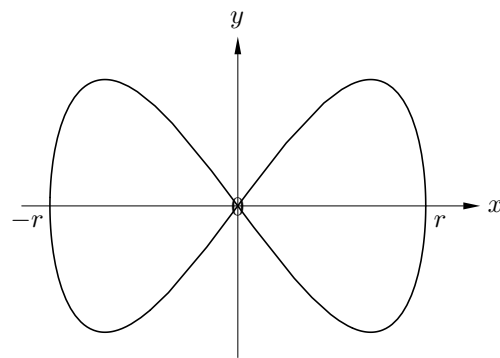


Abb. 9.21 Durch  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(t) = (r \cos t, r \sin 2t)$  ist eine Lemniskate definiert.

Die nächste Abbildung zeigt eine sog. *Schraubenlinie*.

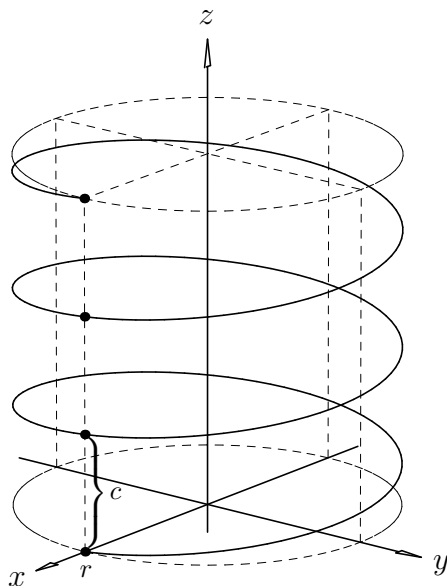


Abb. 9.22 Durch  $f := [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$  ist eine Schraubenlinie mit der (positiven) Ganghöhe  $c$  definiert (Rechtsgewinde). Wenn  $t$  das Intervall  $[2i\pi, 2(i+1)\pi]$  durchläuft ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), dann durchläuft  $f(t)$  genau einen Gewindegang. In der Abbildung sind drei Gewindegänge dargestellt. Für  $c < 0$  entsteht eine „absteigende“ Schraubenlinie (Linksgewinde).

Unser Ziel ist es nun, die Länge einer Kurve zu definieren bzw. zu berechnen. Für beliebige Kurven wird sich eine Länge nicht definieren lassen. Daher betrachten wir jetzt einige speziellere Klassen von Kurven. 9/8/3

### Definition.

9/8/4

Sei  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

- (1)  $\mathfrak{k}$  ist *stetig differenzierbar* in  $[a, b]$   
 $\overline{\text{Df}}$   $f$  ist stetig differenzierbar in  $[a, b]$ .
- (2)  $\mathfrak{k}$  ist *glatt* in  $[a, b]$   
 $\overline{\text{Df}}$   $f$  ist stetig differenzierbar in  $[a, b]$  und  $f'(t) \neq 0$  für jedes  $t \in [a, b]$ .
- (3)  $\mathfrak{k}$  ist *stückweise glatt* in  $[a, b]$   
 $\overline{\text{Df}}$  Es existiert eine Zerlegung  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  von  $[a, b]$ , so daß  $\mathfrak{k}$  in jedem Teilintervall  $[a_i, a_{i+1}]$  glatt ist.

Es sei  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  zunächst eine Kurve und  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Verbindet man die Bildpunkte  $f(a_0), \dots, f(a_{n+1}) \in \mathfrak{k}$  von  $a_0, \dots, a_{n+1}$  der Reihe nach durch Verbindungsstrecken, dann entsteht ein der Kurve einbeschriebener Polygonzug  $P_{\mathfrak{z}}$  (vgl. Abb. 9.23). Der Abstand zwischen je zwei „benachbarten“ Bildpunkten  $f(a_i)$  und  $f(a_{i+1})$  auf der Kurve beträgt  $|f(a_{i+1}) - f(a_i)|$ . Folglich ist die Länge des Polygonzuges gegeben durch 9/8/5

$$l(P_{\mathfrak{z}}) = \sum_{i=1}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

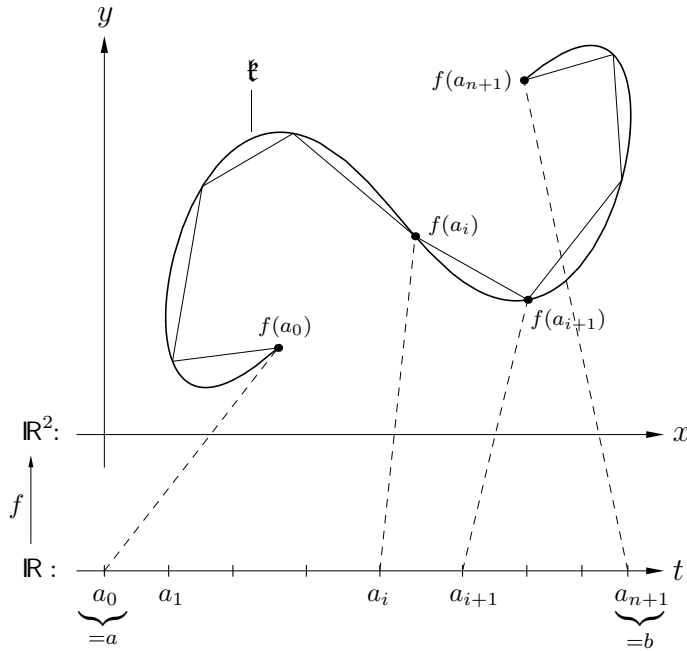


Abb. 9.23 Die Abbildung zeigt eine Kurve im  $\mathbb{R}^2$  mit einem eingeschriebenen Polygonzug. Dabei ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig und  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ . Ist  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ , dann liegen die Bildpunkte  $f(a_i)$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ , auf der Kurve  $\mathfrak{k}$ .

Wir definieren jetzt, was unter der Länge einer Kurve zu verstehen ist.

**Definition.** (*Länge einer Kurve*)

9/8/6

Sei  $\mathfrak{k}$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ .

$\mathfrak{k}$  ist *rektifizierbar* (d.h.  $\mathfrak{k}$  besitzt eine Länge)

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert  $\sup\{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \text{ beliebige Zerlegung von } [a, b]\}$ .

Das Supremum heißt, falls es existiert, *Länge der Kurve* und wird mit  $l(\mathfrak{k})$  bezeichnet.

Es sei jetzt  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine stetig differenzierbare Kurve in  $\mathbb{R}^k$ . Insbesondere ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f = (f_1, \dots, f_k)$  und  $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar für jedes  $j = 1, \dots, k$ . Weiterhin sei  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ , und der Einfachheit halber sei  $u := a_i$  und  $v := a_{i+1}$ . Der Abstand zwischen den auf der Kurve liegenden Punkten  $f(u)$  und  $f(v)$  beträgt

9/8/7

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= \left| (f_1(v), \dots, f_k(v)) - (f_1(u), \dots, f_k(u)) \right| \\ &= \left| (f_1(v) - f_1(u), \dots, f_k(v) - f_k(u)) \right| = (\star). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind  $f_1, \dots, f_k$  differenzierbar in  $[u, v]$ . Folglich gibt es nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jedes  $f_j$  ein  $\xi_{ij} \in [u, v]$ , so daß

$$f_j(v) - f_j(u) = f'_j(\xi_{ij})(v - u). \quad (\xi_{ij} \text{ hängt von } [a_i, a_{i+1}] = [u, v] \text{ und } f_j \text{ ab.})$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u)| &= (\star) = \left| (f'_1(\xi_{i1}) \cdot (v - u), \dots, f'_k(\xi_{ik}) \cdot (v - u)) \right| \\ &= \left| (f'_1(\xi_{i1}), \dots, f'_k(\xi_{ik})) \cdot (v - u) \right| \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij})\right)^2} \cdot (v - u).$$

Also

$$|f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij})\right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i).$$

Die Länge des einbeschriebenen Polygonzuges ist somit

$$\begin{aligned} l(P_{\mathfrak{z}}) &= \sum_{i=0}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij})\right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i). \end{aligned}$$

Die letzte Summe sieht einer Zwischensumme bezüglich der Funktion

$$g(t) = |f'(t)| = |(f'_1(t), \dots, f'_k(t))| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(t)\right)^2}$$

ähnlich. Offenbar ist für  $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ ,

$$\begin{aligned} S_g(\mathfrak{z}, \tau) &= \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_i)\right)^2} \cdot (a_{i+1} - a_i) \end{aligned}$$

eine Zwischensumme. Wir werden jetzt zeigen, daß sich  $l(P_{\mathfrak{z}})$  und  $S_g(\mathfrak{z}, \tau)$  bei geeigneten Zerlegungen um beliebig wenig unterscheiden.

**Lemma.** Es sei  $\mathfrak{k}$  eine durch  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  definierte und stetig differenzierbare Kurve. Weiterhin sei  $(\mathfrak{z}_\nu)$  eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von  $[a, b]$ , und  $(\tau_\nu)$  sei eine Folge zugehöriger Zwischenstellensysteme von  $(\mathfrak{z}_\nu)$ . Dann folgt:

9/8/8

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\nu_0$ , so daß für jedes  $\nu \geq \nu_0$  gilt:

$$|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)| < \varepsilon, \text{ wobei } g(t) = |f'(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(t)\right)^2}.$$

**Beweis.** Sei  $\mathfrak{z}_\nu = (a_0^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$  und  $\tau_\nu = (\xi_1^\nu, \dots, \xi_n^\nu)$ . Dann gilt

9/8/9

$$\begin{aligned} &|l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij}^\nu)\right)^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) - \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_i^\nu)\right)^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n_\nu} \left( \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_{ij}^\nu)\right)^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(f'_j(\xi_i^\nu)\right)^2} \right) \right| \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n_\nu} \left| |\bar{\alpha}_i| - |\bar{\beta}_i| \right| \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu), \text{ wobei } \bar{\alpha}_i = (f'_1(\xi_{i1}^\nu), \dots, f'_k(\xi_{ik}^\nu)) \\ &\quad \text{und } \bar{\beta}_i = (f'_1(\xi_i^\nu), \dots, f'_k(\xi_i^\nu)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^{n_\nu} |\bar{\alpha}_i - \bar{\beta}_i| \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \\
&= \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left( f'_j(\xi_{ij}^\nu) - f'_j(\xi_i^\nu) \right)^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) = (\star).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die Funktionen  $f'_j$  stetig in  $[a, b]$ , also sind sie auch gleichmäßig stetig. Folglich erhält man:

Für jedes  $\varepsilon' > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $\xi_{ij}^\nu, \xi_i^\nu \in [a, b]$  mit  $|\xi_{ij}^\nu - \xi_i^\nu| < \delta$  gilt:  $|f'_j(\xi_{ij}^\nu) - f'_j(\xi_i^\nu)| < \varepsilon'$ , also auch  $\left( f'_j(\xi_{ij}^\nu) - f'_j(\xi_i^\nu) \right)^2 < \varepsilon'^2$ .

Wählt man  $\nu_0$  so groß, daß  $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_0$ , dann erhält man

$$\begin{aligned}
(\star) = \left| l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) \right| &< \sum_{i=0}^{n_\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^k \varepsilon'^2} \cdot (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \\
&= \varepsilon' \sqrt{k} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)}_{=b-a} \\
&= \varepsilon' \sqrt{k} \cdot (b - a).
\end{aligned}$$

Wir wählen jetzt

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k} \cdot (b - a)}.$$

Dann ist

$$\left| l(P_{\mathfrak{z}_\nu}) - S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) \right| < \varepsilon' \sqrt{k} \cdot (b - a) = \sqrt{k} \cdot (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{k} \cdot (b - a)} = \varepsilon. \quad \square$$

**Satz 9.23** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar, und es gilt

9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k \left( f'_i(t) \right)^2} dt.$$

**Beweis.** Wir zeigen zunächst, daß die Menge

9/8/11

$$M = \{l(P_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

nach oben beschränkt ist ( $\implies$  es existiert  $\sup M$ , und somit ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar).

Angenommen,  $M$  ist nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es eine Folge  $(\mathfrak{z}_\nu)$  von Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$ , so daß die Folge  $(l(P_{\mathfrak{z}_\nu}))$  nicht nach oben beschränkt ist. Sei o.B.d.A.  $(\mathfrak{z}_\nu)$  eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (durch entsprechende Verfeinerungen läßt sich dies immer erreichen; und aufgrund der Dreiecksungleichung wird bei einer verfeinerten Zerlegung der einbeschriebene Polygonzug höchstens länger). Nach dem Lemma gilt dann für  $g(t) = |f'(t)|$ .

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( \underbrace{l(P_{\mathfrak{z}_\nu})}_{=\alpha_\nu} - \underbrace{S_g(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)}_{=\beta_\nu} \right) = 0.$$

Wegen der Stetigkeit von  $g(t) = |f'(t)|$  in  $[a, b]$  ist  $|f'(t)|$  als reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen in  $[a, b]$  integrierbar. Folglich gilt nach Satz 9.9

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta_\nu = \int_a^b |f'(t)| dt := d \in \mathbb{R}.$$

Da  $\beta_\nu \rightarrow d$  und  $(\alpha_\nu - \beta_\nu)$  eine Nullfolge ist, muß auch die Folge  $(\alpha_\nu)$  gegen  $d$  konvergieren. Dies führt zum Widerspruch.

Folglich gilt  $\alpha_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} l(\mathfrak{k})$ , und damit ist  $l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt$ .  $\square$

**Korollar.** Ist  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $f(t) = (t, g(t)) := (f_1(t), f_2(t))$  und  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ , dann ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar und 9/8/12

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)} dt.$$

**Beweis.** Die Rektifizierbarkeit von  $\mathfrak{k}$  ist offensichtlich. 9/8/13

Weiterhin gilt  $|f'(t)| = |(t, g(t))'| = \sqrt{(f'_1(t))^2 + (f'_2(t))^2} = \sqrt{1 + g'^2(t)}$ .  $\square$

**Bemerkung.** Betrachtet man eine Kurve, die (wie im Korollar) durch eine reellwertige Funktion einer Veränderlichen definiert ist, dann erhält man eine vereinfachte Formel für die Länge dieser Kurve. 9/8/14

### Beispiele.

(1). Verbindungsstrecke zweier Punkte in der Ebene. 9/8/15/1

Es sei  $\bar{a} = (1, 1)$  und  $\bar{b} = (3, 2)$ . Wählt man als Parameterintervall  $[0, 1]$ , dann ist durch  $f(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) = (1 + 2t, 1 + t) := (f_1(t), f_2(t))$  eine Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke  $\mathfrak{k}$  gegeben. Offenbar sind  $f_1, f_2$  in  $[0, 1]$  stetig differenzierbar und  $f'_1(t) = 2, f'_2(t) = 1$  und damit  $f'(t) = (2, 1)$  für jedes  $t \in [0, 1]$ . Folglich ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar und

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 |f'(t)| dt = \int_0^1 |(2, 1)| dt = \int_0^1 \sqrt{2^2 + 1^2} dt = \sqrt{5}.$$

Natürlich hätte man das Ergebnis in diesem einfachen Fall auch ohne Integrale erhalten.

(2). Umfang eines Kreises mit dem Radius  $r$ . 9/8/15/2

Wir betrachten einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $(0, 0)$  und dem Radius  $r$  (vgl. auch Abb. 9.20).

Für die Kreislinie  $\mathfrak{k}$  ist durch  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(t) = (r \cos t, r \sin t)$  eine Parameterdarstellung gegeben. Offenbar ist  $f$  in  $[0, 2\pi]$  stetig differenzierbar und  $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ . Folglich ist

$$|f'(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r$$

und damit

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt = \int_0^{2\pi} r dt = r2\pi.$$

(3). Länge der Schraubenlinie (vgl. Abb. 9.22).

9/8/15/3

Wir betrachten eine Schraubenlinie mit dem Radius  $r$  und zwei „Gewindegängen“. Es sei  $f : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$ ,  $c \neq 0$ .  $f$  ist in  $[0, 4\pi]$  stetig differenzierbar und  $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c)$ . Dann ist

$$|f'(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2} = \sqrt{r^2 + c^2}.$$

Damit erhält man

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2 + c^2} dt = \sqrt{r^2 + c^2} \cdot 4\pi.$$

(4). Länge der Normalparabel, definiert im Intervall  $[0, 1]$  (Beispiel für die Berechnung der Länge einer Kurve mit Hilfe des Korollars zu Satz 9.23).

9/8/15/4

Es sei  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(t) = t^2$  und  $f(t) = (t, g(t))$ .

Dann ist durch  $\mathfrak{k} = \{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$  eine stetig differenzierbare Kurve gegeben und  $f'(t) = (1, 2t)$ . Also

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = (\star)$$

Man berechnet zunächst am besten das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4t^2} dt &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + z^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \left( (z \cdot \sqrt{1 + z^2}) + \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (2t \cdot \sqrt{1 + 4t^2}) + \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}) \right). \end{aligned}$$

(Die eigentliche Berechnung des Integrals  $\int \sqrt{1 + z^2} dz$  bleibt als Übungsaufgabe.) Also

$$l(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2} (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})).$$

**Bemerkung.** Die Stetigkeit von  $f$  ist nicht hinreichend für die Rektifizierbarkeit der entsprechenden Kurve  $\mathfrak{k}$ . Wir betrachten als Beispiel die Funktion

9/8/15/5

$$f(t) = \begin{cases} (t, t \sin \frac{\pi}{2t}) & \text{für } t \neq 0, \\ (0, 0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

$f$  ist in  $[0, \frac{1}{4}]$  stetig, aber nicht rektifizierbar.

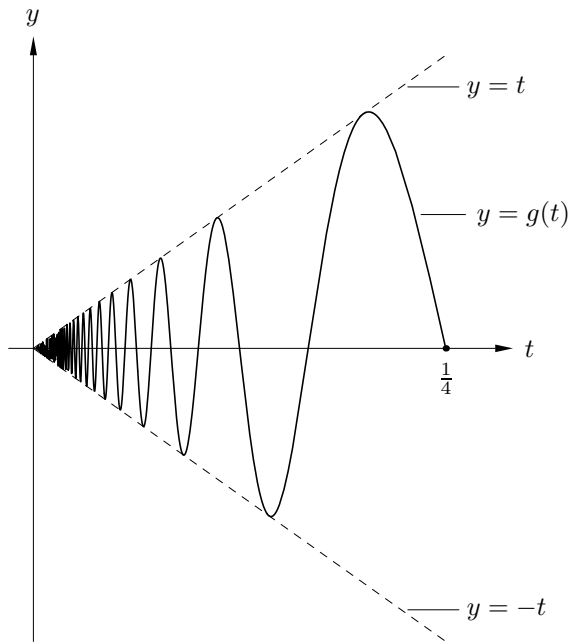


Abb. 9.24 Ist  $g(t) := t \sin \frac{\pi}{2t}$ , dann wird durch die Funktion  $f : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(t) = (t, g(t))$  die hier gezeigte Kurve definiert. (Für größere  $t$  setzt sich die Kurve so nicht fort!.) An den Stellen  $t = \frac{1}{2n}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ , ist  $g(t)$  null; an den Stellen  $\frac{1}{4n+1}$  bzw.  $\frac{1}{4n+3}$  ist  $g(t) = t$  bzw.  $g(t) = -t$ , hierbei ist  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

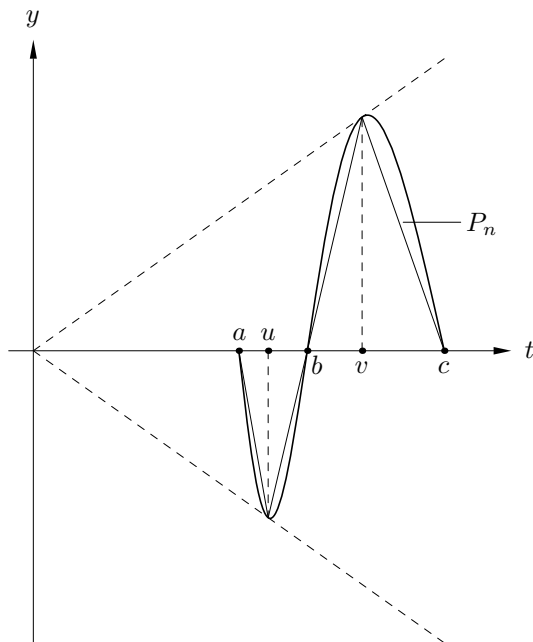


Abb. 9.25 In dieser Abbildung wird nur das Kurvenstück dargestellt, welches das Bild des Intervalls  $[a, c]$  ist, wobei  $a = \frac{1}{4n+4}$  und  $c = \frac{1}{4n}$ . Weiterhin ist  $u = \frac{1}{4n+3}$ ,  $b = \frac{1}{4n+2}$  und  $v = \frac{1}{4n+1}$ . Entsprechend dieser Zerlegung von  $[a, c]$  ist  $P_n$  der eingeschriebene Polygonzug.

Wir betrachten jetzt die Funktion  $g : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(t) = t \sin \frac{\pi}{2t}$  und die Kurve  $\mathfrak{k} := \{f(t) = (t, g(t)) : 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\}$  und zeigen, daß  $\mathfrak{k}$  nicht rektifizierbar ist.

Dazu sei  $1 \leq n < k$  und  $\mathfrak{z}_k = (\frac{1}{4k}, \dots, \underbrace{\frac{1}{4n+4}}_a, \underbrace{\frac{1}{4n+3}}_u, \underbrace{\frac{1}{4n+2}}_b, \underbrace{\frac{1}{4n+1}}_v, \underbrace{\frac{1}{4n}}_c, \dots, \frac{1}{4})$  eine



Zerlegung von  $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{4}]$  (siehe auch Abb. 9.25).

Wir berechnen zunächst den Abstand zwischen den Punkten  $(a, 0)$  und  $(u, \underbrace{f(u)}_{-u})$  in  $\mathbb{R}^2$ . Es ist

$$\begin{aligned} |(u, -u) - (a, 0)| &= \left| \left( \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4}, -\frac{1}{4n+3} \right) \right| \\ &= \left| \left( \frac{1}{(4n+3)(4n+4)}, -\frac{4n+4}{(4n+3)(4n+4)} \right) \right| \\ &= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot |(1, -(4n+4))| \\ &= \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} \cdot \sqrt{1 + (4n+4)^2} \\ &\geq \frac{1}{4n+3}. \end{aligned}$$

Völlig analog ist

$$|(u, -u) - (b, 0)| \geq \frac{1}{4n+3}.$$

Ebenso zeigt man, daß die Abstände zwischen  $(b, 0)$  und  $(v, \underbrace{f(v)}_{=v})$  bzw. zwischen  $(v, v)$  und  $(c, 0)$  größer oder gleich  $\frac{1}{4n+1}$  sind.

Insgesamt erhält man, daß der Polygonzug  $P_n$  eine Länge

$$l(P_n) \geq 2 \cdot \frac{1}{4n+3} + 2 \cdot \frac{1}{4n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

besitzt. Für die Länge des gesamten (einbeschriebenen) Polygonzuges  $P_{\mathfrak{Z}_k}$  bezüglich des Intervalls  $[\frac{1}{4k}, \frac{1}{k}]$  ist dann

$$l(P_{\mathfrak{Z}_k}) \geq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1};$$

und diese Summe ist für  $k \rightarrow \infty$ , also für  $\frac{1}{4k} \rightarrow 0$ , nicht beschränkt. Folglich ist  $\mathfrak{k}$  nicht rektifizierbar.

Im nächsten Abschnitt befassen wir uns mit der Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Funktionenfolgen und -reihen. 9/8/16