

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Grenze*)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M

$\overline{\text{Df}}$ a ist die kleinste obere Schranke von M .

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum* von M).

(2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M

$\overline{\text{Df}}$ a ist die größte untere Schranke von M .

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum* von M).

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.5 (a_n) konvergiert gegen $a \iff$ jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a . 3/1/21

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$\overline{\text{Df}}$ $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x)$.

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$\overline{\text{Df}}$ $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x)$.

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral*

von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes* (*Riemann-*) *Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Satz 9.7 Sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und (\mathfrak{z}_ν) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I . Dann gilt: 9/2/16

$$(1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx.$$

$$(2) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx.$$

$$(3) \quad \text{Ist } f \text{ in } I \text{ integrierbar, dann sind die Limites in (1) und (2) gleich } \int_a^b f(x) dx.$$

9.3 Integrierbarkeitskriterien

Definition. (*Zwischensumme*)

9/3/4

Es sei f in I definiert, $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$ eine Zerlegung von I , und für jedes $i = 1, \dots, n$ sei $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Dann nennt man $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ ein *Zwischenstellensystem* bei der Zerlegung \mathfrak{z} , und $S_f(\mathfrak{z}, \tau) := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f(\xi_i)$ heißt *Zwischensumme* von f bei der Zerlegung \mathfrak{z} und dem Zwischenstellensystem τ .

Satz 9.9 Es sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt. Dann gilt:

9/3/6

f ist in I integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) und jede Folge (τ_ν) von zugehörigen Zwischenstellensystemen τ_ν gilt:

Es existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ (und der Limes ist gleich dem Integral $\int_a^b f(x) dx$.)

Beweis. (\longrightarrow) Nach Voraussetzung ist $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (\mathfrak{z}_ν) gilt nach Satz 9.7:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Ist (τ_ν) eine zu (\mathfrak{z}_ν) gehörende Folge von Zwischenstellensystemen, dann ist nach der obigen Bemerkung stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq S_f(\mathfrak{z}, \tau) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z})$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

(\longleftarrow) Angenommen, f ist unter der gemachten Voraussetzung nicht integrierbar, also

$$\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx.$$

Sei (\mathfrak{z}_ν) eine beliebige ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I , dann konvergiert $S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ für jedes zugehörige Zwischenstellensystem (τ_ν) . Wir konstruieren jetzt ein Zwischenstellensystem, so daß die entsprechende Folge der Zwischensummen nicht konvergiert, und dies liefert uns den gewünschten Widerspruch.

Es sei $\mathfrak{z}_\nu = (a_0^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$, $\nu \geq 0$ und $I_{i\nu} = [a_i^\nu, a_{i+1}^\nu]$.

Offenbar lassen sich $\inf_{x \in I_{i\nu}} f(x)$ und $\sup_{x \in I_{i\nu}} f(x)$ beliebig gut durch Funktionswerte $f(\xi_i^\nu)$ annähern. Für jedes ν konstruieren wir ein τ_ν wie folgt:

Ist ν gerade, dann wählt man $\xi_i^\nu \in I_{i\nu}$ so, daß $f(\xi_i^\nu) - \inf_{x \in I_{i\nu}} f(x) < \frac{1}{n_\nu(b-a)}$, und

ist ν ungerade, dann wählt man $\xi_i^\nu \in I_{i\nu}$ so, daß $\sup_{x \in I_{i\nu}} f(x) - f(\xi_i^\nu) < \frac{1}{n_\nu(b-a)}$.

Auf diese Weise erhält man für jedes ν ein Zwischenstellensystem $\tau_\nu = (\xi_0^\nu, \dots, \xi_{n_\nu}^\nu)$.

Für gerade ν gilt dann

$$\begin{aligned} 0 \leq S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) &= \sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu) \underbrace{\left(f(\xi_i^\nu) - \inf_{x \in I_{i\nu}} f(x) \right)}_{< \frac{1}{n_\nu(b-a)}} \\ &< \underbrace{\sum_{i=0}^{n_\nu} (a_{i+1}^\nu - a_i^\nu)}_{=b-a} \cdot \frac{1}{n_\nu(b-a)} = \frac{1}{n_\nu}. \end{aligned}$$

Analog erhält man $0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) - S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) < \frac{1}{n_\nu}$ für ungerade ν .

Nach Voraussetzung existiert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)) := c$.

Dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu))$ gegen c , insbesondere konvergieren die Teilfolgen mit den geraden bzw. mit den ungeraden Indizes gegen c . Wir haben also insgesamt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{n_\nu} = 0 \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) - S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{n_\nu} = 0 \quad \text{für ungerade } \nu,$$

und somit gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = c \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = c \quad \text{für ungerade } \nu.$$

Schließlich erhält man mit Hilfe von Satz 9.7:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = c \quad \text{für gerade } \nu \text{ und}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = c \quad \text{für ungerade } \nu.$$

Das widerspricht der Annahme. Folglich ist f in I integrierbar. \square