

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Schranke*)

2/3/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

- (1) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *obere Schranke* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad x \leq a \text{ für jedes } x \in M.$
- (2) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *untere Schranke* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad a \leq x \text{ für jedes } x \in M.$
- (3) M ist *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}} \quad M$ besitzt eine obere (bzw. untere) Schranke.
- (4) M ist *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}} \quad M$ ist nach oben und nach unten beschränkt.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*

$\overline{\text{Df}} \quad (a_n)$ konvergiert gegen 0.

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

- (1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}} \quad \text{Es existiert ein } c \in \mathbb{R}, \text{ so daß } a_n \leq c \text{ (bzw. } c \leq a_n) \text{ für jedes } n.$
- (2) (a_n) ist *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}} \quad (a_n)$ ist nach oben und nach unten beschränkt.

Beispiel. $(a_n) = \left(\frac{100^n}{n!} \right)$ ist beschränkt.

3/1/13

$$\left(\frac{100^n}{n!} \right) = \left(\underbrace{\frac{100^0}{0!}}_1, \underbrace{\frac{100^1}{1!}}_{100}, \underbrace{\frac{100^2}{2!}}_{5000}, \dots, \frac{100^{100}}{100!}, \frac{100^{101}}{101!}, \dots \right)$$

0 ist offenbar eine untere Schranke von (a_n) .

Es bleibt noch nachzuweisen, daß es auch eine obere Schranke gibt, obwohl es aufgrund der ersten Glieder nicht so zu sein scheint.

Für $n \geq 100$ und $n = 100 + k$ ist

$$a_n = \frac{100^{100+k}}{(100+k)!} = \frac{100^{100}}{100!} \cdot \underbrace{\frac{100^k}{101 \cdot 102 \cdots (100+k)}}_{<1} \leq \frac{100^{100}}{100!} = a_{100}.$$

Für $n < 100$ ist offensichtlich $a_n \leq a_{100}$. Folglich ist a_{100} eine obere Schranke von (a_n) .

Bemerkung. $\left(\frac{100^n}{n!}\right)$ ist sogar eine Nullfolge. Denn für $n = 100 + k$ und $k \geq 0$ ist

$$a_n = \frac{100^{100+k}}{(100+k)!} = \underbrace{\frac{100^{100}}{100!}}_{:=c} \cdot \underbrace{\frac{100^k}{101 \cdot 102 \cdots (100+k)}}_{\leq \frac{100}{100+k}} \leq c \cdot \frac{100}{100+k};$$

und für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist dann

$$\frac{c \cdot 100}{100+k} < \varepsilon \iff \frac{c \cdot 100}{\varepsilon} < 100+k = n,$$

d.h., für fast alle n gilt $|a_n - 0| = |a_{100+k}| < \varepsilon$.