

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. f ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen*

5/1/7

$\overline{\text{Df}}$ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $(a, b) \in f$.

Bez.: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Beispiele.

5. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.11)

5/2/4/5

Behauptung: f ist in $a = 0$ nicht stetig.

Stetigkeit in $a = 0$ formal ausgedrückt bedeutet:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Folglich bedeutet Unstetigkeit an dieser Stelle:

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D(f) (|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$.

Es sei $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig.

Ist $x \in U_\delta(0)$ mit $-\delta < x < 0$, dann ist $|f(x) - f(0)| = |-1 - 1| = 2 \geq \varepsilon = 1$.

Hieraus folgt die Behauptung.

6. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.12)

5/2/4/6

f ist in keinem Punkt des Definitionsbereiches stetig, denn in jeder δ -Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ liegen rationale und irrationale Zahlen. Wählt man z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\delta > 0$ beliebig, dann liegt wenigstens ein Funktionswert $f(x)$ mit $x \in U_\delta(a)$ und x rational bzw. irrational außerhalb von $U_\varepsilon(f(a))$.

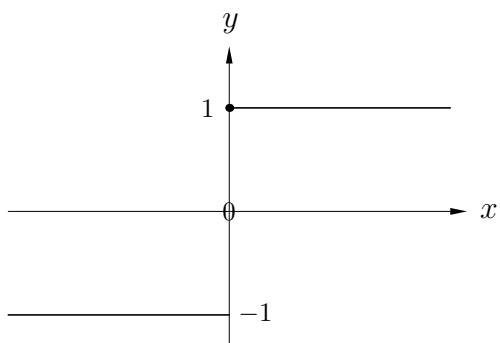


Abb. 5.11

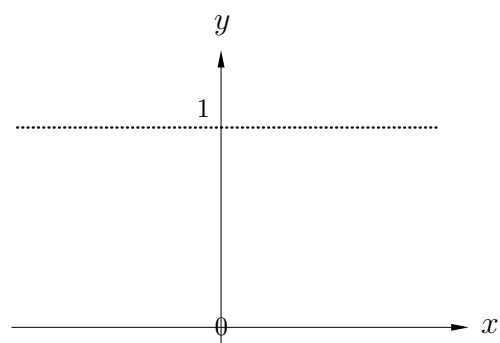


Abb. 5.12