

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Um den Konvergenzbegriff möglichst anschaulich zu formulieren, sagen wir auch: 3/1/1
In jeder ε -Umgebung von a liegen *fast alle* Folgeglieder a_n . „Fast alle“ bedeutet „alle, mit Ausnahme höchstens endlich vieler“.

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Satz 4.9 (Wurzelkriterium) 4/1/35

Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Satz 4.10 (Quotientenkriterium) 4/1/38

Es sei $a_i \neq 0$ für jedes i . Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für jedes i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

2. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \neq 0$.

4/1/42

Hier bietet sich das Quotientenkriterium an, denn

$$\left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \right| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = |a| \cdot \frac{1}{n+1} \leq q < 1$$

für fast alle n und z.B. $q = \frac{1}{2}$.

Dasselbe Beispiel wird mit dem Wurzelkriterium komplizierter.

Die Beispiele 1 und 2 zeigen, daß die untersuchten Reihen für alle fixierten Elemente $a \in \mathbb{R}$ konvergieren.