

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Wir geben jetzt Regeln für die Verneinung zusammengesetzter Aussagen an. Durch schrittweise Anwendung dieser Regeln lassen sich beliebige mathematische Aussagen verneinen. 1/0/21

$$\begin{aligned}\neg(\neg A) &\equiv A, & (\neg(\neg A) \leftrightarrow A \text{ ist also immer wahr.}) \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B, \\ \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B, \\ \neg(A \rightarrow B) &\equiv A \wedge \neg B, \\ \neg(A \leftrightarrow B) &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B), \\ \neg \forall x A(x) &\equiv \exists x \neg A(x), \\ \neg \exists x A(x) &\equiv \forall x \neg A(x).\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich sofort die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B, \\ A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).\end{aligned}$$

Es werden jetzt einige wahre Aussagen betrachtet, die aufgrund ihrer logischen Struktur häufig als *Beweisprinzipien* auftreten. (In der Regel benutzt man diese Prinzipien schon rein intuitiv richtig.) 1/0/22

$$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B \quad (\text{Modus ponens oder Abtrennungsregel})$$

Aus der Gültigkeit der Aussagen A und $A \rightarrow B$, schließt man auf die Gültigkeit der Aussage B .

Analog interpretiert man auch die folgenden Prinzipien:

$$\begin{aligned}(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) &\rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\text{Kettenschluß}) \\ A \rightarrow B &\leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A \quad (\text{Kontraposition})\end{aligned}$$

Die Kontraposition besagt, daß die Aussagen $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$ stets den gleichen Wahrheitswert besitzen. Dies darf allerdings nicht verwechselt werden mit der Umkehrung $B \rightarrow A$ der Implikation $A \rightarrow B$. Die Aussagen $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ sind im allgemeinen nicht äquivalent.

$$(\neg A \rightarrow F) \rightarrow A \quad (\text{indirekter Beweis; } F \text{ steht für eine beliebige falsche Aussage})$$

Praktisch geht man beim indirekten Beweis folgendermaßen vor:

Man nimmt an, daß die Aussage A falsch ist, also die Negation $\neg A$ gilt. Dann leitet man aus dieser Annahme etwas Falsches her, d.h., man erzeugt einen *Widerspruch*. (Dies wird häufig einfach durch das Symbol ⌵! ausgedrückt). Daraus schließt man, daß die Aussage

$\neg A$ nicht richtig sein kann; also gilt die Aussage A . (Hierbei wird ganz wesentlich das Prinzip der Zweiwertigkeit benutzt.)

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem 1/0/23

Induktionsaxiom:

Es sei E eine Eigenschaft für natürliche Zahlen n . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage $\forall m E(m)$ zu beweisen, genügt es:

1. $E(0)$ zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2. $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$ nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und zeigt:

Wenn $E(n)$, so $E(n+1)$.

$E(n)$ heißt *Induktionsvoraussetzung*, $E(n+1)$ *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a): $E(n)$ ist falsch.

Dann ist die Implikation $E(n) \rightarrow E(n+1)$ aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b): $E(n)$ ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von $E(n+1)$ zu zeigen.

Achtung: Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges n wird vorausgesetzt, daß $E(n)$ schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

Übungsaufgaben

11. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß

1/1/11

(a) $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$, (Bernoullische Ungleichung)

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) nicht $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)

Bemerkung. Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.

- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)

- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)

- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.

- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.

- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.

- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.

- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.

- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.

- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.

- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Lemma. (Bernoullische Ungleichung)

2/2/8/2

Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ und ist m eine natürliche Zahl, dann gilt $(1 + a)^m \geq 1 + ma$.

Beweis. Den Beweis führt man leicht induktiv über m , er bleibt als Übungsaufgabe.

2/2/8/3

□