

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.9 (*Cauchysches Konvergenzkriterium*)

3/1/37

Eine Folge (a_n) ist konvergent (in \mathbb{R}) gdw

für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in M gleichmäßig gegen f

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in M$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 5.18 (*Cauchysches Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz*)

5/4/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind.

(1) (f_n) ist in M gleichmäßig konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in M$ gilt: $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M gleichmäßig konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert,

so daß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in M$ gilt: $\left| \sum_{i=0}^m f_i(x) - \sum_{i=0}^n f_i(x) \right| < \varepsilon$

($\iff \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \right| < \varepsilon$, falls $m > n$ und $m = n + k$).

Beweis. (1). (\longrightarrow) Sei (f_n) in M gleichmäßig konvergent gegen f und $\varepsilon > 0$. Nach Definition existiert ein n_0 , so daß für jedes $m, n \geq n_0$ und für jedes $x \in M$ gilt:

5/4/4

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man die Behauptung.

(\leftarrow) Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen mit konstanten Gliedern konvergiert die Zahlenfolge $(f_n(x))$ für jedes fixierte $x \in M$ gegen einen Grenzwert, der mit $f(x)$ bezeichnet wird. f ist damit eine in M definierte Funktion.

Wir haben zu zeigen, daß (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es ein n_0 , so daß für jedes $m, n \geq n_0$ gilt: $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei x beliebig aber fest. Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{|f_m(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) - f_n(x) \right| = |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(2) erhält man leicht mit Hilfe von (1). \square