

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.9 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/2

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.16 (Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

7/3/24

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar und $c \in I$.

Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$ (bzw. $f''(c) < 0$), dann besitzt f in c ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

Beweis. Sei $f''(c) > 0$ (den Fall $f''(c) < 0$ beweist man analog).

7/3/25

Dann gilt nach der Definition der Differenzierbarkeit von f' in c

$$0 < f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Nach den Eigenschaften des Grenzwertes gibt es eine Umgebung $U(c)$, so daß

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \quad \text{für alle } x \in U(c).$$

Wegen $f'(c) = 0$ gilt also für alle $x \in U(c)$

$$\frac{f'(x)}{x - c} > 0.$$

Folglich haben $f'(x)$ und $x - c$ in $U(c)$ stets das gleiche Vorzeichen.

Wenn also $x > c$, so $f'(x) > 0$,

und wenn $x < c$, so $f'(x) < 0$.

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c_x),$$

wobei c_x zwischen x und c liegt, also $c < c_x < x$ bzw. $x < c_x < c$.

Da die Funktionen $f'(x)$ und $x - c$ links und rechts von c jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen, folgt aus der letzten Gleichheit

$$f(x) - f(c) = f'(c_x) \cdot (x - c) > 0 \quad \text{für } x \in U(c) \setminus \{c\} \quad \implies$$

$$f(x) > f(c) \quad \text{für } x \in U(c) \setminus \{c\}.$$

Folglich besitzt f in c ein lokales Minimum. \square