

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

**Definition.** (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  und für alle  $x \in M$  gilt:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Definition.** (*Funktionenreihe*)

5/4/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind, und es sei

$F_n := \sum_{i=0}^n f_i$  (die  $F_n$  sind also ebenfalls in  $M$  definierte Funktionen).

(1) Die Folge  $(F_n)$  heißt *Funktionenreihe*.

**Bez.:**  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  bzw.  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$  oder einfach  $\sum f_i$  bzw.  $\sum f_i(x)$

(2)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$   $(F_n)$  ist in  $M$  konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen  $f$ .

(3)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  absolut konvergent gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$   $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$  ist in  $M$  konvergent gegen  $f$ .

**Satz 5.18** (*Cauchysches Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz*)

5/4/3

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind.

(1)  $(f_n)$  ist in  $M$  gleichmäßig konvergent gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß für alle  $m, n \geq n_0$  und alle  $x \in M$  gilt:  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ .

(2)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  gleichmäßig konvergent gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert,

so daß für alle  $m, n \geq n_0$  und alle  $x \in M$  gilt:  $\left| \sum_{i=0}^m f_i(x) - \sum_{i=0}^n f_i(x) \right| < \varepsilon$

( $\iff \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \right| < \varepsilon$ , falls  $m > n$  und  $m = n + k$ ).