

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$ (a muß nicht selbst zu $D(f)$ gehören).

f besitzt an der Stelle a den Grenzwert c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:
Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

Definition. (*uneigentlicher Grenzwert*)

5/2/7

Sei a ein Häufungspunkt von $D(f)$.

f hat an der Stelle a den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ (bzw. $-\infty$)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $c \in \mathbb{R}$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $f(x) > c$ (bzw. $f(x) < c$).

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$)

Definition. (*Grenzwert im Unendlichen*)

5/2/9

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $D(f) = [a, \infty)$ (bzw. $D(f) = (-\infty, a]$).

f besitzt für $x \rightarrow \infty$ (bzw. für $x \rightarrow -\infty$) den Grenzwert c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt:
Wenn $x > b$ (bzw. $x < b$), so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$)

5.3 Elementare Funktionen

Definition. (*Potenzfunktion mit beliebigem Exponenten*)

5/3/43

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$.

$x^a \stackrel{\text{Df}}{=} e^{a \ln x}$ heißt *Potenzfunktion* (mit dem Exponenten a).

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert*)

6/3/48

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$

bzw. von $D_l(f, a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.

f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen* Grenzwert c
 $\overline{\text{Def}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$ bzw.
für jedes $x \in D_l(f, a)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

$$\text{Bez.: } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c \quad \text{bzw.} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c$$

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.12 (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “)

7/3/0

Voraussetzung:

- (1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar und in a (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Korollar 1.

7/3/2

Voraussetzung:

- (1) Sei $a > 0$ und f, g seien in (a, ∞) differenzierbar.
- (2) Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, \infty)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Korollar 2. (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{\infty}{\infty}$ “)

7/3/4

Voraussetzung:

- (1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar.
- (2) Sei $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß g' in (a, b) stets positiv oder stets negativ ist. 7/3/5

Angenommen, es gibt Elemente $a' < b'$ in (a, b) , so daß $g'(a') < 0 < g'(b')$ (den Fall $g'(a') > 0 > g'(b')$ beweist man analog). Da g in (a, b) differenzierbar ist, ist g in $[a', b']$ stetig und besitzt dort ein Minimum und ein Maximum. Wenigstens eins von beiden liegt im Inneren der Intervalls. Sei c eine Extremstelle von g in (a', b') . Dann ist $g'(c) = 0$ (siehe Beweis des Satzes von Rolle). **⚡!**

Da g' in (a, b) das Vorzeichen nicht wechselt, ist g dort streng monoton (dies folgt sofort aus Satz 7.9). Wegen $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ ist g in (a, b) streng monoton fallend und in einer hinreichend kleinen rechtsseitigen Umgebung von a positiv.

Mit diesen Informationen beweisen wir nun die Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} := c$ ($c \in \mathbb{R}$). Folglich gibt es nach Definition des Limes ein $u \in (a, b)$, so daß

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in (a, u).$$

Wir wählen jetzt u so nahe bei a , daß g in $(a, u]$ positiv ist. Nach dem 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes x mit $a < x < u$ ein $\xi \in (x, u)$, so daß

$$\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dann gilt für jedes feste $u \in (a, b)$ und jedes $x \in (a, u)$:

$$\left| \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiterhin ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} - c = \frac{f(u) - c \cdot g(u)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right) \cdot \left(\frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c\right). \quad (\star)$$

((\star) kann durch ausrechnen bewiesen werden.)

Wegen $a < x < u$ ist $0 < g(x) < g(u)$ und somit $0 < \frac{g(u)}{g(x)} < 1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| &\leq \underbrace{\left| \frac{f(u) - c \cdot g(u)}{g(x)} \right|}_{< 1} + \underbrace{\left| 1 - \frac{g(u)}{g(x)} \right| \cdot \left| \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - c \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \\ &< \frac{1}{g(x)} \cdot \underbrace{|f(u) - c \cdot g(u)|}_{:= d} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (u \text{ fest} \implies d \text{ konstant}) \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{1}{g(x)} = 0$. Folglich existiert ein δ mit $0 < \delta < u - a$, so daß für jedes $x \in (a, a + \delta)$ gilt: $\frac{d}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Hieraus folgt schließlich für alle $x \in (a, a + \delta)$:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \frac{d}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \quad \square$$

Bemerkung.

7/3/6

(1) Der Beweis läßt sich nicht unmittelbar auf den Fall „ $\frac{0}{0}$ “ zurückführen, denn differenziert man in $\left(\frac{1}{g}\right)/\left(\frac{1}{f}\right)$ Zähler und Nenner, dann kommen in der jeweiligen Ableitung f^2 bzw. g^2 vor, und über das Grenzwertverhalten des entsprechenden Quotienten dieser Funktionen weiß man nicht Bescheid.

(2) Satz 7.12 und die Korollare 1 und 2 können analog auf die folgenden Fälle übertragen werden:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pm\infty.$$

(3) Häufig läßt sich der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ leichter bestimmen als $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Daher sind die oben angegebenen Regeln oft sehr hilfreich bei der Berechnung solcher Limites.

(4) Einen Ausdruck der Form „ $0 \cdot \infty$ “ kann man in eine der Formen „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ überführen.

Denn wenn $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \infty$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

falls diese Limites existieren.

(5) Ausdrücke der Form „ 0^0 “, „ ∞^0 “ und „ 1^∞ “ lassen sich auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, indem man die Definition der Potenzfunktion mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ausnutzt:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Wenn $f(x) \searrow 0$, so $\ln f(x) \rightarrow -\infty$,

wenn $f(x) \rightarrow \infty$, so $\ln f(x) \rightarrow \infty$,

wenn $f(x) \rightarrow 1$, so $\ln f(x) \rightarrow 0$.

Man versucht zunächst, den Grenzwert des Exponenten in $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ zu bestimmen. Mit diesem Wert erhält man dann wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion den Grenzwert von $f(x)^{g(x)}$.