

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

Bez. $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und f differenzierbar in jedem Punkt $a \in M$.

7/1/4

f' ist die 1. *Ableitung* von f in M

$\overline{\text{Df}}$ f' ist eine in M definierte Funktion, und für jedes $a \in M$ ist $f'(a)$ die

1. Ableitung von f an der Stelle a ,

(d.h., für jedes $a \in M$ ist $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$).

Übungsaufgaben

8. Folgende Funktionen sind auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu untersuchen:

7/5/8

(a) $f(x) = |x - 2|, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{für } x \leq -2, \\ 0, & \text{für } x > -2. \end{cases}$