

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (*Häufungspunkt*)

2/3/11

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein Häufungspunkt von M

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ In jeder ε -Umgebung von a liegt wenigstens ein von a verschiedenes Element
($:=$ Punkt) aus M ,
(d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x \neq a$ und $x \in U_\varepsilon(a)$).

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.3 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

3/1/14

Kapitel 6 Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Satz 6.4 (*Satz von Bolzano-Weierstraß*)

6/1/24

Jede unendliche und beschränkte Menge von Elementen aus \mathbb{R}^n besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

Damit übertragen sich sehr viele Konvergenzeigenschaften für Folgen in \mathbb{R} auf Folgen in \mathbb{R}^n ; insbesondere gilt:

Ist (\bar{x}_i) in \mathbb{R}^n beschränkt ($:=$ die Menge $\{\bar{x}_i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ ist beschränkt), dann existiert ein Häufungspunkt \bar{a} von (\bar{x}_i) und eine Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) von (\bar{x}_i) , die gegen \bar{a} konvergiert.

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 6.10 (*Folgenstetigkeit*)

6/2/13

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in D(f)$.

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_i) in \mathbb{M}_1 mit $x_i \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_i \rightarrow a_i$, so $f(x_i) \rightarrow f(a)$.

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.14 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist f in M stetig, und ist M beschränkt und abgeschlossen, dann ist auch $f(M)$ beschränkt und abgeschlossen.* 6/3/16

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $f(M)$ beschränkt ist.

6/3/17

Angenommen, $f(M)$ ist nicht beschränkt.

Dann gilt: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\bar{x} \in M$, so daß $|f(\bar{x})| \geq c$.

Speziell für $c = c_i = i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ existieren dann Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots \in M$, so daß $|f(\bar{x}_i)| \geq c_i = i$.

Wegen $\bar{x}_i \in M$ ist die Folge (\bar{x}_i) beschränkt, folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine gegen \bar{a} konvergente Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) .

Wenn $\bar{x}_{i_j} = \bar{a}$ für ein j , dann ist $\bar{a} \in M$.

Wenn $\bar{x}_{i_j} \neq \bar{a}$ für alle j , dann ist \bar{a} ein Häufungspunkt der Menge

$\{\bar{x}_{i_j} : j = 0, 1, 2, \dots\}$, und damit ist auch $\bar{a} \in M$, denn M ist abgeschlossen.

Folglich ist f in \bar{a} definiert und stetig. Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt: $f(\bar{x}_{i_j}) \rightarrow f(\bar{a})$.

Andererseits ist $|f(\bar{x}_{i_j})| \geq c_{i_j} = i_j \rightarrow \infty$. Daher ist $(f(\bar{x}_{i_j}))$ unbeschränkt und somit nicht konvergent. **N!**

Wir zeigen nun, daß $f(M)$ abgeschlossen ist, d.h., ist b ein Häufungspunkt von $f(M)$, dann ist $b \in f(M)$.

Sei b ein Häufungspunkt von $f(M)$. Dann gibt es eine Folge (b_i) mit $b_i \in f(M)$ und $b_i \rightarrow b$. Wegen $b_i \in f(M)$ gibt es ein $\bar{x}_i \in M$, so daß $b_i = f(\bar{x}_i)$. Man erhält also eine Folge (\bar{x}_i) in M , die beschränkt ist, da ja M beschränkt ist. Folglich besitzt (\bar{x}_i) einen Häufungspunkt \bar{a} und eine Teilfolge (\bar{x}_{i_j}) , die gegen \bar{a} konvergiert.

Wie im ersten Teil des Beweises ist $\bar{a} \in M$ und damit $f(\bar{a}) \in f(M)$, folglich ist f in \bar{a} stetig.

Wegen $\bar{x}_{i_j} \rightarrow \bar{a}$ gilt: $b_{i_j} = f(\bar{x}_{i_j}) \rightarrow f(\bar{a}) = b \implies$

$$f(\bar{a}) = b \in f(M). \quad \square$$