Kapitel 2
Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.4 **2/2/11**

(1) *Die rationalen und die reellen Zahlen sind dicht geordnet*
(d.h., zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere rationale Zahl, und zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine weitere reelle Zahl).

(2) *Die Menge der rationalen Zahlen ist dicht in* $\mathbb{R}$
(d.h., zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl).

(3) *Zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine irrationale Zahl.*

Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. f ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen* **5/1/7**
$\overset{\text{Df}}{=}$ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $(a, b) \in f$.
Bez.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*) **5/2/1**
f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*
$\overset{\text{Df}}{=}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
(d.h., für jede ε-Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ-Umgebung von a, so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

5/2/2

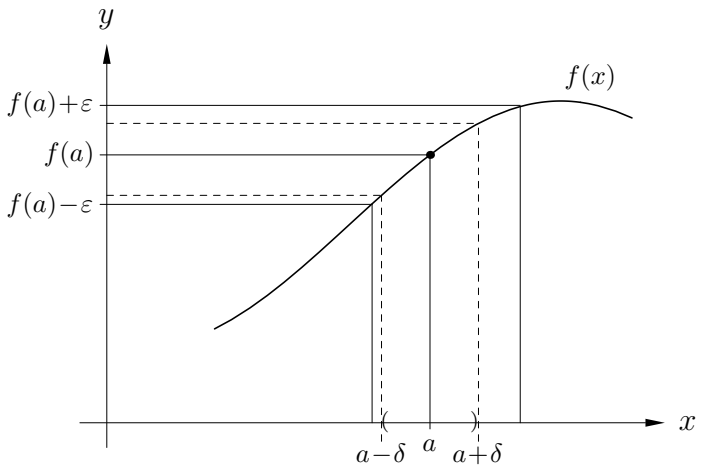

Abb. 5.7 Ist die Funktion f an der Stelle a stetig und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein $\delta > 0$, so daß durch f die δ-Umgebung von a in die zu $f(a)$ gehörende ε-Umgebung abgebildet wird, also $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$.
Offenbar leistet auch jedes kleinere $\delta > 0$ das Verlangte.

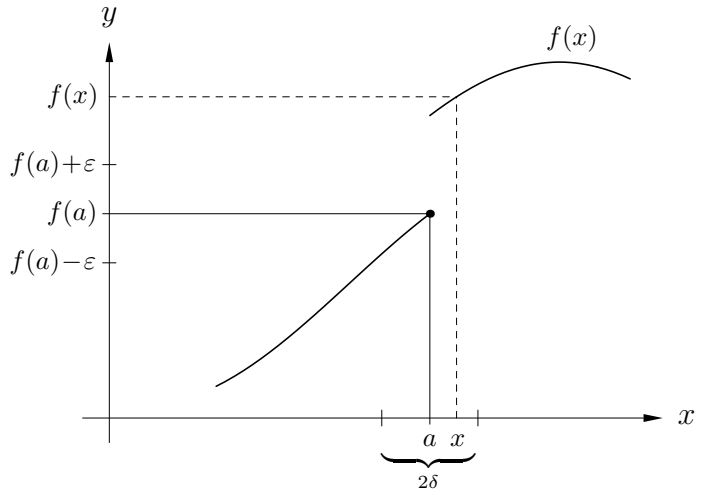

Abb. 5.8 Die Funktion f ist an der Stelle a nicht stetig. Denn ist $\varepsilon > 0$ wie in der Abbildung gegeben, dann existiert kein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(a)$ stets gilt: $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.

Beispiele.

6. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.12) **5/2/4/6**

f ist in keinem Punkt des Definitionsbereiches stetig, denn in jeder δ-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ liegen rationale und irrationale Zahlen. Wählt man z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\delta > 0$ beliebig, dann liegt wenigstens ein Funktionswert $f(x)$ mit $x \in U_\delta(a)$ und x rational bzw. irrational außerhalb von $U_\varepsilon(f(a))$.

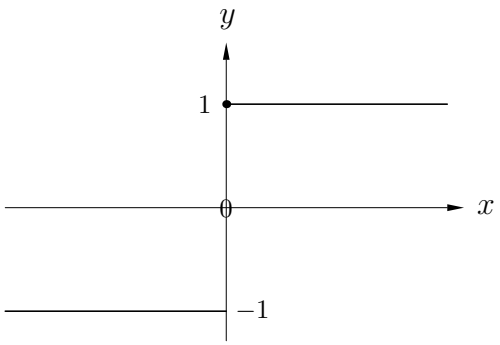

Abb. 5.11

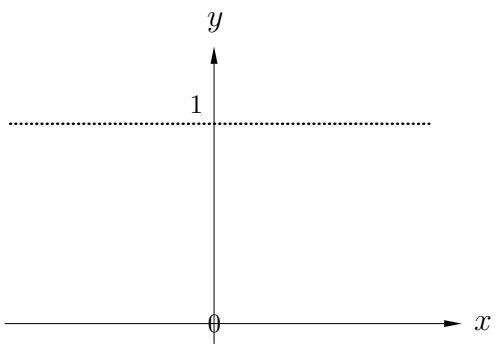

Abb. 5.12