

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

## 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Definition.** (*Potenzen mit rationalen Exponenten*)

2/2/10

Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ , und es sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$ .

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{Df}}{=} \sqrt[n]{a^m},$$

$$a^{-\frac{m}{n}} \stackrel{\text{Df}}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

## 3.1 Konvergenz von Folgen

**Beispiel.** (Definition der *Eulerschen Zahl*  $e$ )

3/1/35

Sei  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Behauptung:  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist  $(a_n)$  nach Satz 3.8 konvergent.)

z.z.: 1.  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$  und  
2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  (denn alle  $a_n$  sind positiv).

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\ &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} > 1 &\iff (n+2)(n^2+n+1) > (n+1)(n^2+2n+1) \\ &\iff n^3+3n^2+3n+2 > n^3+3n^2+3n+1\end{aligned}$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$ , und damit ist  $(a_n)$  streng monoton wachsend.

Zu 2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Offenbar ist  $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$  für jedes  $n$ .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge  $(b_n)$  streng monoton fällt.

g.z.z.:  $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$  (denn alle  $b_n$  sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für  $(a_n)$ , er wird als Übungsaufgabe gestellt.

Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \text{ für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist  $(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und  $(b_n)$  monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen  $e$  und  $e'$ , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung:  $e = e'$ .

Annahme:  $e \neq e'$ .

Dann ist  $\varepsilon := |e - e'| > 0$ , und folglich gilt für hinreichend große  $n$

$$\begin{aligned}|e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|.\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$|a_n - b_n| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right|$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } \frac{12}{\varepsilon} < n.$$

Folglich ist  $\varepsilon = |e - e'| < \varepsilon$  **!**

Also  $e = e'$ .

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Beispiel.** (Geometrische Reihe)

4/1/3

Sei  $|a| < 1$  und  $a \neq 0$ .

Dann konvergiert  $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$  gegen  $\frac{1}{1-a}$ ; ( $\sum a^i$  heißt *geometrische Reihe*).

**Beweis.** Für  $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$  ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \cdots + a^n)(1-a) = 1 + \cdots + a^n - (a + \cdots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der  $n$ -ten Partialsumme berechnet.

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$  erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$

### 4.4 Potenzreihen

**Bemerkung.** Die offene Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $\varrho$  (bzw. das offene Intervall in  $\mathbb{R}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und der Länge  $2\varrho$ ) heißt *Konvergenzgebiet* oder *Konvergenzkreis* (bzw. *Konvergenzintervall*) und  $a$  heißt *Mittelpunkt der Potenzreihe*  $\sum a_n(x-a)^n$ .

4/4/12

Innerhalb dieser offenen Kreisscheibe (bzw. des offenen Intervalls) konvergiert die Potenzreihe absolut, außerhalb divergiert sie; auf dem Rande kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (man betrachte das Beispiel  $\sum \frac{x^n}{n}$  für  $x = \pm 1$ ).

## 4.5 Rechnen mit Potenzreihen

**Satz 4.25** (*Identitätssatz für Potenzreihen*)

4/5/6

*Voraussetzungen:*

- (1) Es seien  $\sum a_n(x-a)^n$  und  $\sum b_n(x-a)^n$  Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  und  $\varrho_1, \varrho_2 > 0$ .
- (2)  $(x_\nu)$  sei eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $\lim x_\nu = a$  und  $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$ .
- (3) Für jedes  $\nu \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n$ .

*Behauptung:* Für jedes  $n$  ist  $a_n = b_n$ .

(D.h., stimmen zwei Potenzreihen in unendlich vielen Punkten  $x_\nu$  überein und ist der Mittelpunkt  $a$  der Potenzreihen wenigstens ein Häufungspunkt dieser Menge, dann stimmen die Reihen schon koeffizientenweise überein, sie sind also identisch.)

**Lemma.** Es sei  $\sum c_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho > 0$ , und sei  $(x_\nu)$  eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $|x_\nu - a| < \varrho$  und  $\lim x_\nu = a$ .

4/5/7/2

Dann ist  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$ .

**Bemerkung.** Als Folgerung erhält man sofort: Stimmen zwei Potenzreihen in einem „kleinen Intervall“ überein, dann sind sie schon identisch.

4/5/8

Es sei hier ein Ausblick auf eine spätere wichtige Anwendung des Lemmas gegeben.

Mit Potenzreihen lassen sich auf einfache Weise Funktionen definieren:

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ , wobei  $f(x)$  dann im Konvergenzgebiet der Potenzreihe definiert ist.

Es gilt offenbar  $f(a) = a_0$ , und aus dem Lemma erhält man:

Wenn  $x_\nu \rightarrow a$ , so  $f(x_\nu) \rightarrow f(a)$ . Hieraus folgt, daß die Funktion wenigstens an der Stelle  $x = a$  stetig ist (dieser Begriff ist natürlich noch zu definieren). Aus der Stetigkeit an einer Stelle folgt bei einigen wichtigen Funktionen schon die Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich (z.B. für die Sinusfunktion und die Exponentialfunktion, mit deren Hilfe sich weitere elementare Funktionen definieren lassen).

In den späteren Kapiteln werden wir uns noch ausführlicher mit weiteren Eigenschaften von Funktionenfolgen und -reihen befassen, insbesondere werden wir Untersuchungen zur Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz vornehmen.

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*Stetigkeit*)

5/2/1

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$   $a \in D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

(d.h., für jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f(a)$  gibt es eine  $\delta$ -Umgebung von  $a$ , so daß  $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$ ).

**Satz 5.3** (*Folgenstetigkeit*)

5/2/14

Es sei  $a \in D(f)$ . Dann gilt:

$f$  ist in  $a$  stetig gdw für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in D(f)$  gilt:

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , so  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

### 5.3 Elementare Funktionen

**Exponentialfunktion**

5/3/17

In dem Abschnitt über Reihen haben wir schon gesehen, daß die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert (sogar absolut; zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß für  $x = 0$  und  $n = 0$   $x^n = 1$  gesetzt wurde).

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist also durch  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ein Wert  $y$  festgelegt, d.h., durch die Reihe ist eine Funktion  $f(x)$  definiert. (vgl. Abb. 5.18)

**Satz 5.11** Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1)  $D(\exp) = \mathbb{R}$ .
- (2) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$   
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3)  $\exp(0) = 1$  und  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ,  
für  $x < 0$  ist  $0 < \exp(x) < 1$ , und  
für  $x > 0$  ist  $1 < \exp(x)$ .
- (4)  $\exp$  ist streng monoton wachsend  
(folglich ist  $\exp$  injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5)  $\exp(1) = e$   $\left( e = \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ .
- (6) Für rationale  $x = \pm \frac{m}{n}$  ist  $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$   
(für irrationale  $x$  ist  $e^x$  bisher nicht definiert!).
- (7)  $\exp$  ist stetig.

**Beweis.** (1) ist trivial, da  $\sum \frac{x^n}{n!}$  für alle  $x$  konvergiert.

(2). Übungsaufgabe!

(3). Es ist  $\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 \implies$

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \implies \\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

hieraus folgt insbesondere  $\exp(x) \neq 0$ . Für  $x > 0$  ist

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{>0} > 1.$$

Für  $x < 0$  ist  $-x > 0$ , also  $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < 1$ , denn  $\exp(-x) > 1$ .

(4). Es sei  $x_1 < x_2$ ; z.z.:  $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ .

Wegen  $x_1 < x_2$  gibt es ein  $h > 0$ , so daß  $x_1 + h = x_2$ . Folglich ist

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + h) = \exp(x_1) \cdot \underbrace{\exp(h)}_{>1} > \exp(x_1).$$

(5). Es ist

$$\exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \implies$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dann gilt

$$1 + \frac{1}{n} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^k}{k!} = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Weiterhin gilt für  $n \geq 2$

$$\left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (\text{denn } \frac{1}{k!} < 1 \text{ für } k \geq 2) \\ = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Also

$$1 + \frac{1}{n} < \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1} \implies \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \exp(1) < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \implies$$

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \exp(1) \leq \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e \implies \exp(1) = e.$$

$$(6). \quad 1. \quad x = 0 \implies$$

$$\exp(0) = 1 = e^0 = \left(\exp(1)\right)^0.$$

$$2. \quad x = m > 0 \implies$$

$$\exp(m) = \exp(\underbrace{1 + \dots + 1}_{m\text{-mal}}) = \exp(1) \cdots \exp(1) = \left(\exp(1)\right)^m.$$

$$3. \quad x = \frac{1}{n} \implies$$

$$\exp(1) = \exp\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \implies$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

$$4. \quad x = \frac{m}{n} > 0 \implies$$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(\left(\exp(1)\right)^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\exp(1)\right)^{\frac{m}{n}}.$$

$$5. \quad x = -\frac{m}{n} < 0 \implies$$

$$\exp\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{\left(\exp(1)\right)^{\frac{m}{n}}} = \left(\exp(1)\right)^{-\frac{m}{n}}.$$

(7). Wir zeigen zunächst, daß  $\exp(x)$  in  $a = 0$  stetig ist. Hierzu benutzen wir das Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (vgl. Satz 4.24).

Wenn  $x_i \neq 0$  und  $x_i \rightarrow 0$ , so  $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{:=c_n} (x_i - 0)^n \xrightarrow{i \rightarrow \infty} c_0 = \frac{1}{0!} = 1$ .

Also  $\exp(x_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \exp(0) = 1$ .

Sei jetzt  $a \in \mathbb{R}$  beliebig,  $x_n \in \mathbb{R}$  und  $x_n \rightarrow a$ .

z.z.:  $\exp(x_n) \longrightarrow \exp(a)$ .

g.z.z.:  $\exp(x_n) - \exp(a) \longrightarrow 0$

$$\exp(x_n) - \exp(a) = \exp(a) \cdot \left(\exp(\underbrace{x_n - a}_{\longrightarrow 0}) - 1\right) \longrightarrow 0 \implies$$

$$\exp(x_n) \longrightarrow \exp(a),$$

also ist  $\exp$  in  $a$  stetig.  $\square$