

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Es sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung eines Punktes nach allen Variablen partiell differenzierbar. Dann entstehen offenbar beim partiellen Differenzieren neue Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) := \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, die ebenfalls von \bar{x} abhängen. Diese partiellen Ableitungen können wieder nach gewissen Variablen partiell differenzierbar sein, etwa nach der Variablen x_j . 8/2/0

Bildet man $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right)$, dann erhält man die *2. partielle Ableitung* von f nach x_i und x_j in \bar{x} .

$$\text{Bez.: } \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right) := \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j}(\bar{x})$$

Für $i = j$ schreibt man $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right) := \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}(\bar{x})$. 8/2/1

Ist $i \neq j$, dann nennt man die 2. partiellen Ableitungen auch *gemischte partielle Ableitungen*.

Nach dem gleichen Muster definiert man induktiv die *n-ten partiellen Ableitungen*. Hierfür benutzt man die Bezeichnung

$$\frac{\partial^n f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(\bar{x}), \quad \text{wobei } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}.$$