

Kapitel 5

Reelle Funktionen

Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie mit Hilfe der ε - δ -Abschätzung, daß die Funktionen \sqrt{x} und $f \cdot g$ stetig sind, falls f und g stetig sind. 5/5/1

2. Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus \mathbb{R} die folgende Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist: 5/5/2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 4 - x & \text{für } 3 \leq x. \end{cases}$$

3. Es sei $x \in \mathbb{R}$. $[x]$ bezeichne diejenige ganze Zahl mit der Eigenschaft $x - 1 < [x] \leq x$. 5/5/3

Man bestimme das Stetigkeitsverhalten der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = [x]$ mit $D(f) = \mathbb{R}$.
(b) $f(x) = x - [x]$ mit $D(f) = \mathbb{R}$.

4. Es sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: 5/5/4
Ist f injektiv und stetig in $[a, b]$, dann ist f streng monoton in $[a, b]$.

5. Die Funktion f sei in \mathbb{R} definiert durch: 5/5/5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}, & \text{falls } x \notin \mathbb{N}, \\ \frac{4x - 6}{x + 1}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen von f .

6. Es sei 5/5/6

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } x = \frac{n}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m, n \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f in allen rationalen Punkten seines Definitionsbereiches nicht stetig und in allen irrationalen Punkten stetig ist.

7. Man untersuche, ob die folgenden Funktionen Umkehrfunktionen besitzen und bestimme sie ggf.: 5/5/7

- (a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ für $f : [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$,
(b) $f(x) = e^{x^2}$ für $f : [0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$,
(c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ für $f : [\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

8. Berechnen Sie:

5/5/8

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x), \\ \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}, & \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}). \end{array}$$

9. (a) Zeigen Sie, daß die Funktionen

5/5/9

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{mit} \quad f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g(x) = \log_a x \quad \text{mit} \quad g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h(x) = \arcsin x \quad \text{mit} \quad h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig sind.

(b) In welchem Intervall ist $f(x) = \sqrt[n]{|\log_a(\arcsin x)|}$ stetig und warum ?

10. Es sei $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 < 2, \\ 1 & \text{für } x^2 > 2 \end{cases}$ mit $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$.

5/5/10

Beweisen Sie, daß f stetig ist in \mathbb{Q} .

11. Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in a stetig sind:

5/5/11

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} & \text{für } x \neq -1; 2, \\ \frac{4}{3} & \text{für } x = -1, \end{cases} \quad a = -1,$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

12. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen an der Stelle a einen Grenzwert besitzen:

5/5/12

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x < 0, \\ 2^x & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \quad a = 0,$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad a = 0,$$

$$\text{(c)} \quad f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x) & \text{für } |x| \leq 1, \\ |x - 1| & \text{für } |x| > 1, \end{cases} \quad a = 1, \quad a = -1.$$

13. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$ auf Stetigkeit.

5/5/13

14. Es sei $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}$.

5/5/14

(a) Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich von f an.

- (b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten des Definitionsbereiches die Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist.
15. (a) Es sei $f(x) = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt[3]{3x + 4}$ mit $f : [\sqrt{2}, \infty) \mapsto \mathbb{R}$. 5/5/15
Beweisen Sie, daß es ein $a \in [\sqrt{2}, \infty)$ gibt, so daß $f(a) = 7$.
- (b) Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ stetig, dann gibt es ein $x \in [a, b]$, so daß $f(x) = x$.
16. Unter Benutzung von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ berechne man: 5/5/16
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}, \quad a \neq 0,$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}.$
[Hinweis: $\cos 3x = \cos(5x - 2x), \cos 7x = \cos(5x + 2x).$]
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}.$
[Hinweis: Man führe eine neue Variable $y = \arctan x$ ein.]
17. Es sei f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig, und es sei $f(a) > 0$. Zeigen Sie 5/5/17
- (a) mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition,
(b) mit Hilfe des Kriteriums von Satz 5.2:
Es existiert eine Umgebung U von a , so daß für alle $x \in U \cap D(f)$ gilt: $f(x) > 0$.
18. Es sei f in $[a, b]$ stetig, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ und 5/5/18
 $M = \{x : x \in [a, b] \text{ und } f(x) > 0\}.$
Zeigen Sie:
- (a) Es existiert $\sup M$.
(b) $a < \sup M < b$.
(c) $f(\sup(M)) = 0$.
19. Beweisen Sie: 5/5/19
- (a) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$
(b) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$
20. Lösen Sie die folgenden Gleichungen: 5/5/20
- (a) $2^{3^x} = 3^{4^x},$
(b) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) - 2 = 0,$
(c) $15^x + 9^x = 25^x$ [Hinweis: Man dividiere durch 25^x .]