

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.1 Operationen für Funktionen

**Definition.** (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ .

(1)  $f$  ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in  $M$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x_1, x_2 \in M$  gilt: Wenn  $x_1 \leq x_2$ , so  $f(x_1) \leq f(x_2)$   
(bzw.  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ).

(2)  $f$  ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in  $M$

$\overline{\overline{\text{Df}}}$  Für jedes  $x_1, x_2 \in M$  gilt: Wenn  $x_1 < x_2$ , so  $f(x_1) < f(x_2)$   
(bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$ ).

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Satz 7.9** (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/2

Ist  $a < b$  und  $f$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar, dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ .

#### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Beweis.** (1). ( $\longrightarrow$ ) Sei  $f$  in  $I$  monoton wachsend und  $c \in I$ .

7/3/10

z.z.:  $f'(c) \geq 0$ .

Für  $h > 0$  ist  $f(c + h) - f(c) \geq 0$ , und für  $h < 0$  ist  $f(c + h) - f(c) \leq 0$ . Also für alle  $h \neq 0$  ist

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \implies$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(c + h) - f(c)}{h}}_{\geq 0} = f'(c) \geq 0.$$

( $\longleftarrow$ ) Für jedes  $x \in I$  gelte:  $f'(x) \geq 0$ .

z.z.: Wenn  $x_1, x_2 \in I$  und  $x_1 < x_2$ , so  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

für ein geeignetes  $c \in (x_1, x_2)$ .

Nach Voraussetzung ist  $f'(c) \geq 0$  und somit  $f(x_2) \geq f(x_1)$ , denn  $x_2 - x_1 > 0$ .

(2). ( $\longrightarrow$ ) Sei  $f$  in  $I$  streng monoton wachsend. Dann ist  $f$  monoton wachsend, also  $f'(x) \geq 0$  für jedes  $x \in I$ . Gäbe es ein Teilintervall  $(a', b') \subseteq I$  mit  $a' < b'$ , so daß  $f'(x)$  dort null ist, dann wäre  $f$  in  $(a', b')$  konstant und damit nicht streng monoton (vgl. Korollar zu Satz 7.9).

( $\longleftarrow$ ) Wegen  $f'(x) \geq 0$  in  $I$  ist  $f$  monoton wachsend. Wäre  $f$  nicht streng monoton wachsend in  $I$ , dann gäbe es ein Teilintervall  $(a', b') \subseteq I$ , so daß  $f$  in  $(a', b')$  konstant ist. Also  $f'(x) = 0$  für jedes  $x \in (a', b')$ .  $\nabla!$   $\square$

**Definition.** (*konvex*)

7/3/12

Sei  $a < b$  und  $f$  in  $I = (a, b)$  differenzierbar.

(1)  $f$  ist in  $I$  *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von unten*

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x, c \in I$  mit  $x \neq c$  gilt:  
 $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$  bzw.  
 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle  $c$  an der Funktion  $f$  liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

(2)  $f$  ist in  $I$  *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von oben*

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x, c \in I$  mit  $x \neq c$  gilt:  
 $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c)$  bzw.  
 $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle  $c$  an der Funktion  $f$  liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

**Satz 7.14** Sei  $a < b$  und  $f$  in  $I = (a, b)$  differenzierbar. Dann gilt:

7/3/14

$f$  ist in  $I$  *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von unten* gdw  $f'$  in  $I$  *monoton* (bzw. *streng monoton*) *wächst*.

(Der Satz gilt analog für „von oben“ und „monoton fallend“.)

**Beweis.** ( $\longrightarrow$ ) Sei  $f$  in  $I$  konvex von unten und seien  $c_1, c_2 \in I$  mit  $c_1 < c_2$ .

7/3/15

z.z.:  $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ .

Nach Definition der Konvexität gilt:

$$\begin{aligned} f(c_2) &\geq f(c_1) + f'(c_1) \cdot (c_2 - c_1) \quad \text{und} \\ f(c_1) &\geq f(c_2) + f'(c_2) \cdot (c_1 - c_2) \quad \implies \\ f(c_2) + f(c_1) &\geq f(c_1) + f(c_2) + f'(c_1) \cdot (c_2 - c_1) + f'(c_2) \cdot \underbrace{(c_1 - c_2)}_{-(c_2 - c_1)} \implies \\ 0 &\geq \underbrace{(c_2 - c_1)}_{>0} \cdot (f'(c_1) - f'(c_2)) \quad \implies \end{aligned}$$

$$f'(c_1) - f'(c_2) \leq 0.$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung.

( $\leftarrow$ ) Sei  $f'$  in  $I$  monoton wachsend und  $c, x \in I$ ,  $x \neq c$ , und o.B.d.A. sei  $c < x$  (den Fall  $x < c$  beweist man analog).

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein  $c_1$  mit  $c < c_1 < x$ , so daß

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c_1).$$

Da  $f'$  in  $I$  monoton wächst, gilt

$$f(x) = f(c) + \underbrace{f'(c_1)}_{\geq f'(c)} \cdot \underbrace{(x - c)}_{> 0},$$

und damit ist  $f(x) \geq f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$ .

Den verbleibenden Teil der Behauptung: „streng konvex“ und „streng monoton“ zeigt man sehr leicht durch ähnliche Überlegungen wie im Beweis von Satz 7.13.  $\square$