

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Beispiele.

1. $f(x) = c$, $D(f) = \mathbb{R}$. (vgl. Abb. 5.9)

5/2/4/1

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Konstante Funktionen sind also stetig.

2. $f(x) = x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. (vgl. Abb. 5.10)

5/2/4/2

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen wieder $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

Folglich ist auch die Identitätsfunktion stetig.

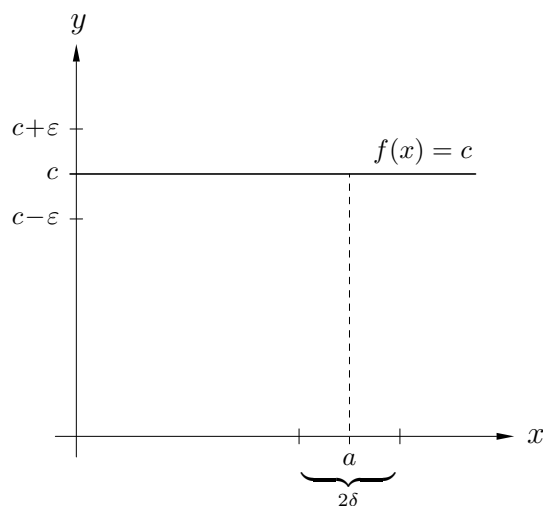


Abb. 5.9 – Konstante Funktion

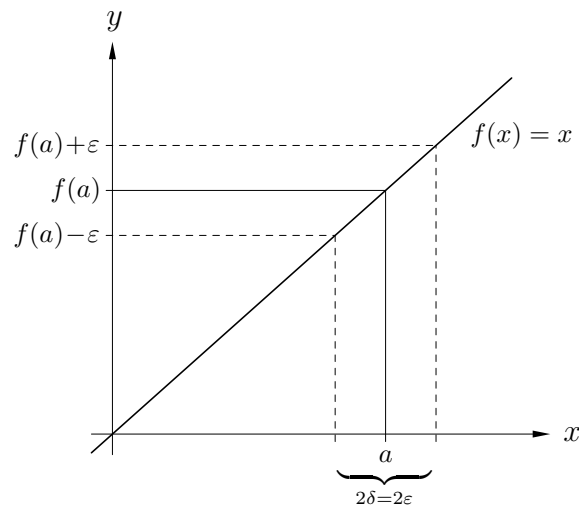


Abb. 5.10 – Identitätsfunktion

Satz 5.4 (Stetigkeit der rationalen Operationen)

5/2/17

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

Satz 5.7 Ist f in $[a, b]$ injektiv und stetig, dann ist f in $[a, b]$ streng monoton.

5/2/25

($\implies f$ besitzt in $[a, b]$ eine Umkehrfunktion.)

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.10 Die entwickelten algebraischen Funktionen sind stetig.

5/3/12

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus der Stetigkeit der Identitätsfunktion, der konstanten Funktionen, der Wurzelfunktionen (siehe nächste Bemerkung) und der Stetigkeit der rationalen Operationen. \square

5/3/13

Übungsaufgaben

13. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$ auf Stetigkeit.

5/5/13