

## Kapitel 1

### Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

#### Induktionsaxiom:

Es sei  $E$  eine Eigenschaft für natürliche Zahlen  $n$ . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage  $\forall m E(m)$  zu beweisen, genügt es:

1.  $E(0)$  zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2.  $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$  nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und zeigt:

Wenn  $E(n)$ , so  $E(n+1)$ .

$E(n)$  heißt *Induktionsvoraussetzung*,  $E(n+1)$  *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a):  $E(n)$  ist falsch.

Dann ist die Implikation  $E(n) \rightarrow E(n+1)$  aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b):  $E(n)$  ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von  $E(n+1)$  zu zeigen.

**Achtung:** Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges  $n$  wird vorausgesetzt, daß  $E(n)$  schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

##### Satz 3.10 (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen und  $c, d$  seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1)  $(c \cdot a_n)$  ist konvergent und  $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$ .
- (2)  $(a_n + b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ .
- (3)  $(a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ .

- (4) Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  konvergent und  

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent  
und  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$
- (5)  $(|a_n|)$  ist konvergent und  $\lim |a_n| = |\lim a_n|.$
- (6) Ist  $a_n \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq \lim b_n.$   
Ist insbesondere  $a_n \leq d$  bzw.  $d \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq d$   
bzw.  $d \leq \lim b_n.$

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Definition.** (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  konvergiert (gegen  $a$ )  $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$  konvergiert (gegen  $a$ ).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

$a$  heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

**Satz 4.4** Es seien  $\sum a_i, \sum b_i$  konvergent und  $a, b \in \mathbb{R}.$

4/1/19

Dann ist  $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i)$  konvergent und  $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i) = a \cdot \sum a_i + b \cdot \sum b_i.$

#### Übungsaufgaben

4. Man berechne  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}.$

4/6/4

[Hinweis:  $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ ; (wichtige Zerlegung; bitte einprägen !)]

5. Ermitteln Sie die  $n$ -te Partialsumme und den Grenzwert der Reihe

4/6/5

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}.$$

[Hinweis: Man ermittle zunächst Zahlen  $a, b, c$ , so daß gilt:  $\frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i+1} + \frac{c}{i+2}.$ ]

8. Zeigen Sie, daß

4/6/8

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2},$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4};$     Hinweis:  $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3;$     Hinweis:  $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}.$