

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

Definition. (*Folge*)

3/0/1

F ist eine *Folge* (von reellen Zahlen)

$\overline{\text{Df}}$ F ist eine Abbildung von \mathbb{N} in \mathbb{R} ,

d.h., jeder natürlichen Zahl n wird eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so daß $F(n) = a_n$.

Bez.: $F = (a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ oder einfach $F = (a_n)$.

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .

(2) (a_n) ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Häufungspunkt einer Folge*)

3/1/16

Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein *Häufungspunkt* (oder *Verdichtungspunkt*) von (a_n)

$\overline{\text{Df}}$ In jeder ε -Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder a_n

(die untereinander auch gleich sein dürfen, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0 gibt es ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$).

Bemerkung. Es gibt Folgen, die nicht beschränkt sind und

3/1/19

- (a) keinen Häufungspunkt besitzen,
- (b) genau einen Häufungspunkt besitzen,
- (c) für jedes $k \in \mathbb{N}$ genau k Häufungspunkte besitzen bzw.
- (d) unendlich viele Häufungspunkte besitzen.

Beispiele.

- (a) $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$ (kein Häufungspunkt)
- (b) $(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ (genau ein Häufungspunkt)
- (c) $(a_n) = (1, \dots, k, 1, 1, \dots, k, 2, 1, \dots, k, 3, 1, \dots, k, 4, \dots)$ (genau k Häufungspunkte)
- (d) Übungsaufgabe!