

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Definition.** Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in  $M$  definiert.

8/3/9

(1)  $f$  heißt in  $M$  *stetig differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist in  $M$  differenzierbar und  $f'$  ist in  $M$  stetig.

(Dies ist nach dem Satz 8.2 genau dann der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen von  $f$  in  $M$  vorhanden und stetig sind.)

(2)  $f$  ist in  $M$   $(k+1)$ -mal *stetig differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$   $f^{(k)}$  ist in  $M$  stetig differenzierbar.

**Bez.:**  $f \in C^{k+1}(M)$ .

Es sei jetzt  $M$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in C^{k+1}(M)$ .

8/3/10

Weiterhin seien  $\bar{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\bar{c} = \bar{a} + t \cdot \bar{h}$ , wobei  $t \in [0, 1]$ ,  $\bar{h} = (h_1, h_2)$  und die Verbindungsstrecke  $s(\bar{a}, \bar{b})$  ganz zu  $M$  gehöre. Dann ist

$$\varphi(t) := f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, deren Ableitung sich gemäß der Kettenregel wie folgt berechnet

$$\varphi'(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{c}) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(\bar{c}) \cdot h_2.$$

Für  $\frac{\partial}{\partial x}$  bzw.  $\frac{\partial}{\partial y}$  schreiben wir kurz  $D_1$  bzw.  $D_2$ . Damit ergibt sich

$$\varphi'(t) = h_1 \cdot D_1 f + h_2 \cdot D_2 f = (h_1 D_1 + h_2 D_2) f,$$

wobei das Argument von  $f$  der Einfachheit halber weggelassen wurde.

Für  $n = 2$  ist dann

$$\varphi''(t) = h_1(h_1 D_1 D_1 f + h_2 D_2 D_1 f) + h_2(h_1 D_1 D_2 f + h_2 D_2 D_2 f).$$

Nach dem Satz von Schwarz ist  $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$  und somit erhält man für  $D_i D_i := D_i^2$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\varphi''(t) = h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f.$$

In Analogie zur binomischen Formel schreiben wir für  $h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f$  im folgenden auch  $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(2)} f$ .

Analog erhält man für  $\varphi^{(k)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , die Darstellung

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(k)} f.$$

(Beweis induktiv über  $k$ )

Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^{m+1}(M)$  und sind  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\bar{a} + t \cdot \bar{h}$  mit  $0 \leq t \leq 1$  und  $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$  Elemente aus  $M$ , deren Verbindungsstrecke ganz zu  $M$  gehört, und ist  $\varphi(t) = f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n)$ , dann ist

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{a} + t\bar{h}).$$

Schreibt man  $D_i$  für  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n h_i D_i f \quad \text{und} \quad \varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j D_i D_j f \\ &= (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(2)} f, \end{aligned}$$

wenn man den Satz von Schwarz und eine der binomischen Formel (für  $n$  Summanden) analoge Schreibweise benutzt.

Induktiv zeigt man schließlich

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(k)} f.$$

Jetzt sind wir in der Lage, den Taylorschen Satz in übersichtlicher Weise zu formulieren.

**Satz 8.12** (Satz von Taylor für Funktionen mit  $n$  Veränderlichen)

8/3/11

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $U$  eine offene Umgebung von  $\bar{c}$  und  $f \in C^{m+1}(U)$ . Sei  $\bar{x} \in U$ , so daß die Verbindungsstrecke von  $\bar{c}$  und  $\bar{x}$  ganz zu  $U$  gehört. Für  $\bar{x} - \bar{c} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) := (h_1, \dots, h_n) = \bar{h}$  gilt dann: Es gibt ein  $\vartheta \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß  $f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{c}) + R_m(\bar{x})$ , wobei

$$R_m(\bar{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \cdot (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(m+1)} f(\bar{c} + \vartheta \bar{h}).$$