

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Beispiele.**

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . Wir betrachten jetzt die  $2^n$ -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} - S_{2^n} &= \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n} \\ &\quad (\text{jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \frac{1}{2^{n+1}}) \\ &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \dots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\ &= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Teilfolge  $(S_{2^i})$  von  $(S_n)$  ist also unbeschränkt, und somit ist  $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$  nicht konvergent.

Da  $(S_n)$  monoton wächst, ist  $\sum \frac{1}{n}$  bestimmt divergent gegen  $+\infty$ .

5. Beispiel dafür, wie der junge Leibniz 1672 in Paris – er sollte dort seine „Rechenkünste“ unter Beweis stellen – mit falschen Hilfsmitteln den richtigen Wert einer Reihe berechnet hat (vgl. Wußing, H. und Wolfgang Arnold. Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1975, S. 212).

4/1/30/5

Gegeben ist die Reihe  $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{1 + \dots + n} + \dots$ .

Man berechne den Wert der Reihe.

Ansatz von Leibniz:

Sei  $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  (harmonische Reihe; nicht konvergent!) und

$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$ . Dann ist (nach Leibniz):

$$\begin{aligned} B - 1 + \frac{1}{2}A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots \right) \\ &= \underbrace{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)}_{=1} + \underbrace{\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left( \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right)}_{=\frac{1}{3}} + \underbrace{\left( \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \right)}_{=\frac{1}{4}} + \dots \\ &= B. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$B - 1 + \frac{1}{2}A = B \quad \text{und damit} \quad A = 2.$$

Erstaunlicherweise stimmt der Wert. Die Methoden sind aber fehlerhaft, da mit divergenten Reihen so umgegangen wurde, als wären sie konvergent.

Es soll jetzt noch eine exakte Lösung gegeben werden.

Es ist (nach Gauß 1777 – 1855)

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies \frac{1}{1 + \dots + n} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2 \cdot \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Es ist  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ; also

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \left( \frac{1}{1} - \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_0 - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_0 - \dots - \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_0 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2. \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \dots + i} = 2.$$