

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Im folgenden seien – wenn nichts anderes vereinbart wird – f, g, F, G reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen, und I sei ein Intervall in \mathbb{R} . 9/1/0

Definition. (*Stammfunktion*) 9/1/1

Es seien f, F in einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ definiert.

F ist eine *Stammfunktion* von f in M

$\stackrel{\text{Df}}{=} F$ ist in M differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in M$.

Satz 9.1 Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f in einem Intervall I , dann unterscheiden sich F_1 und F_2 höchstens um eine additive Konstante. 9/1/2

(D.h., es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $F_1(x) = F_2(x) + c$ für jedes $x \in I$).

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $F'_1 = f = F'_2$ in I . Folglich ist $F'_1 - F'_2 = (F_1 - F_2)'$, und nach dem Korollar zum ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist $F_1 - F_2$ konstant. \square 9/1/3

Bemerkung. 9/1/4

- (1) Ist F_1 eine Stammfunktion von f in I und ist $F_2(x) = F_1(x) + c$ für jedes $x \in I$, dann ist offenbar auch F_2 eine Stammfunktion von f in I .
- (2) Besitzt f überhaupt eine Stammfunktion in I und ist $x_0 \in I$, dann gibt es genau eine Stammfunktion F von f in I , so daß $F(x_0) = 0$.

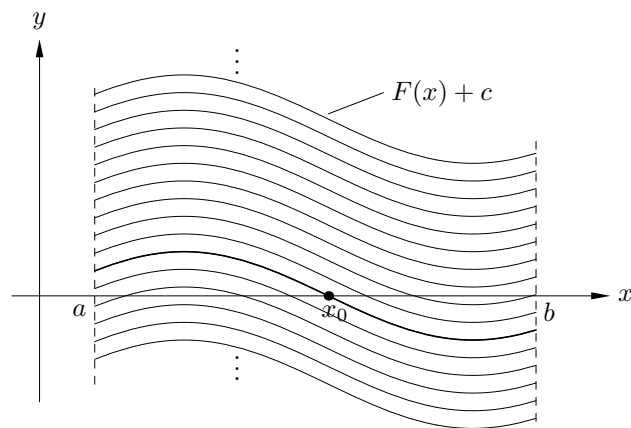


Abb. 9.3 Die Abbildung zeigt eine Schaar von Funktionen, die sich von F jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden. Ist F differenzierbar in $I = [a, b]$ und $F' = f$, dann symbolisiert diese Schaar die Menge aller Stammfunktionen von f in I , unter denen es für $x_0 \in I$ genau eine gibt, welche an der Stelle x_0 null wird.

Beweis zu (2). Ist F_1 eine beliebige Stammfunktion von f und $F_1(x_0) := c$, dann ist auch $F(x) = F_1(x) - c$ eine Stammfunktion, und es gilt $F(x_0) = F_1(x_0) - c = 0$. Ist F^* ebenfalls eine Stammfunktion von f mit $F^*(x_0) = 0$, dann unterscheiden 9/1/5

sich F^* und F nur um eine additive Konstante, also $F^* - F = c'$. Folglich ist $F^*(x_0) - F(x_0) = 0 = c'$.

Für diese – durch $x_0 \in I$ eindeutig bestimmte – Stammfunktion F benutzen wir folgende Bezeichnungen:

$$\mathbf{Bez.}: F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt := \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Aus drucktechnischen Gründen schreiben wir für $\int_{x_0}^x \dots$ auch $\int_{x_0}^x \dots$.

Offenbar gilt $F'(x) = \left(\int_{x_0}^x f(x) dx \right)' = f(x)$.

Definition. (*unbestimmtes Integral*)

9/1/6

Die Menge aller Stammfunktionen von f in einem Intervall I heißt *unbestimmtes Integral* von f in I .

$$\mathbf{Bez.}: \int f(x) dx.$$

Das unbestimmte Integral von einer Funktion – die eine Stammfunktion besitzt – ist also eine ganze Klasse von Funktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante unterscheiden. Will man mit diesen Klassen „rechnen“, dann kann man dies repräsentantenweise tun und jeweils entsprechende Konstanten addieren.

9/1/7

Zusammenstellung von Grundintegralen

$$\begin{array}{ll} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \\ \int \cos x dx = \sin x + c & \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + c & \\ \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x + c & \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & \\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + c, & |x| < 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c & \\ \int e^x dx = e^x + c & \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c, & |x| > 1 \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|. & \end{array}$$

Diese Grundintegrale werden alle durch Differentiation bewiesen.

Beispiel. Es gilt $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$, wobei c eine beliebige Konstante ist. 9/1/8

Es genügt zu zeigen, daß $F(x) = \ln |x| + c$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$ ist.

Für $x < 0$ ist $|x| = -x$, also $\ln |x| = \ln(-x)$ und schließlich

$$F'(x) = (\ln(-x) + c)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ ist $|x| = x$ und damit $F'(x) = (\ln |x| + c)' = \frac{1}{x}$.

Integration zusammengesetzter Funktionen 9/1/9

Aus den Differentiationsregeln gewinnt man entsprechende Regeln für das Integrieren.

Satz 9.2 (Integration einer Summe) 9/1/10

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Besitzen f und g Stammfunktionen in I , dann besitzt auch $a \cdot f + b \cdot g$ eine Stammfunktion in I , und es gilt

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx = a \cdot \int f(x) dx + b \cdot \int g(x) dx.$$

Beweis. Sei $x_0 \in I$ und F, G seien die Stammfunktionen von f bzw. g , für die 9/1/11

$F(x_0) = G(x_0) = 0$, also $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ und $F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$ und

$G(x) = \int_{x_0}^x g(x) dx$. Dann ist offenbar $a \cdot F + b \cdot G$ die Stammfunktion von $a \cdot f + b \cdot g$ in I , welche an der Stelle x_0 Null wird. Also ist

$$\int_{x_0}^x (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx = a \cdot F(x) + b \cdot G(x) = a \cdot \int_{x_0}^x f(x) dx + b \cdot \int_{x_0}^x g(x) dx. \quad \square$$

Bemerkung. Hieraus folgt sofort $\int (-f(x)) dx = - \int f(x) dx$. 9/1/12

Die Produktregel für das Differenzieren liefert eine entsprechende Regel für das Integrieren. Denn $(uv)' = u'v + uv'$, folglich ist uv eine Stammfunktion für $u'v + uv'$. Setzt man $u' = f$ und $v = g$, dann motiviert dies den folgenden Satz.

Satz 9.3 (partielle Integration) 9/1/13

Es seien f und g in I definiert. Besitzt f in I eine Stammfunktion F und ist g in I differenzierbar und besitzt $F \cdot g'$ in I eine Stammfunktion, dann besitzt auch $f \cdot g$ in I eine Stammfunktion, und es ist

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

Beweis. Es sei $x_0 \in I$ und o.B.d.A. sei F die Stammfunktion von f in I , die an der Stelle x_0 Null wird. Weiterhin sei 9/1/14

$$h(x) := F(x)g(x) - \int_{x_0}^x F(x)g'(x) dx.$$

Dann ist h als Differenz zweier differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar in I , und es gilt

$$h'(x) = \underbrace{F'(x)}_{=f(x)} g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x).$$

Folglich ist h die Stammfunktion von $f \cdot g$ in I , die an der Stelle x_0 Null wird. Hieraus folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Ersetzt man in Satz 9.3 f durch u' und damit F durch u , dann erhält man $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$. 9/1/15

Beispiel. Es sei $f(x) = x \cdot e^x$. 9/1/16

Wir versuchen, dieses Integral mit Hilfe der partiellen Integration zu berechnen.

Ansatz 1: $u'(x) = x$ und $v(x) = e^x$. Dann ist $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von x und $v'(x) = e^x$. Folglich ist

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx.$$

Das letzte Integral ist aber komplizierter als das Ausgangsintegral, demzufolge führt dieser Ansatz nicht zum Ziel.

Ansatz 2: $u'(x) = e^x$ und $v(x) = x$. Dann ist $u(x) = e^x$ eine Stammfunktion von e^x und $v'(x) = 1$. Folglich ist

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x - 1) + c.$$

Auch die Kettenregel für das Differenzieren liefert eine entsprechende Regel für das Integrieren. Denn $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$, folglich ist $u(v(x))$ eine Stammfunktion von $u'(v(x)) \cdot v'(x)$. Setzt man $u' = f$ und $v = g$, dann motiviert dies folgenden Satz. 9/1/17

Satz 9.4 (*Substitutionsregel*)

Sei g in dem Intervall I und f in dem Intervall J definiert, und es sei $g(I) \subseteq J$. Besitzt f in J eine Stammfunktion und ist g in I differenzierbar, dann besitzt $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in I eine Stammfunktion, und es gilt 9/1/18

$$\int_{x_0}^x f(g(x))g'(x) dx = \int_{t_0}^t f(t) dt, \quad \text{wobei } x_0 \in I, t = g(x) \text{ und } t_0 = g(x_0).$$

Beweis. Sei $x_0 \in I$, $t_0 = g(x_0)$ und F die Stammfunktion von f in J , die in $t_0 \in J$ Null wird. 9/1/19

Es gilt also $F(t_0) = F(g(x_0)) = 0$ und

$$\left(F(g(x)) \right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Folglich ist $F(g(x))$ die Stammfunktion von $f(g(x)) \cdot g'(x)$, die in x_0 Null wird, denn $F(g(x_0)) = F(t_0) = 0$. Also ist

$$\underbrace{F(g(x))}_{=t} = \int_{x_0}^x f(g(x)) \cdot g'(x) dx,$$

und damit gilt auch

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(t) dx = \int_{x_0}^x f(g(x)) \cdot g'(x) dx. \quad \square$$

Mit Hilfe einer Stammfunktion F von f läßt sich sofort das unbestimmte Integral 9/1/20
 $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$ angeben.

Beispiele.

1. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \sqrt{1+x^2} \cdot x dx$. 9/1/21/1

Es sei $I = (-\infty, \infty)$, und $J = [0, \infty)$. Setzt man $f(t) = \sqrt{t}$ und $g(x) = 1 + x^2$, dann ist $g'(x) = 2x$ und $\sqrt{1+x^2} \cdot x = \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} \cdot 2x = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Eine Stammfunktion von $f(t) = \sqrt{t}$ ist durch $\frac{2}{3} \sqrt{t^3}$ gegeben. Folglich ist

$$\int \sqrt{1+x^2} \cdot x dx = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$

2. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ mit $g(x) \neq 0$. 9/1/21/2

Setzt man $f(t) = \frac{1}{t}$ und $t = g(x)$, dann ist $\frac{g'(x)}{g(x)} = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

$\ln |t|$ ist eine Stammfunktion von $f(t) = \frac{1}{t}$. Folglich ist

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + c.$$

3. Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{1}{1+e^x} dx$. 9/1/21/3

Wir versuchen dies wieder mit Hilfe der Substitutionsregel.

Hierzu setzen wir $t = e^x$. Folglich ist $\frac{dt}{dx} = e^x$. Rechnet man mit Differentialen, dann

ergibt sich hieraus $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$. Folglich ist

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{t(1+t)} dt.$$

Der Integrand wird mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* so umgeformt, daß sich die resultierenden Integrale leichter berechnen lassen. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

wobei A und B Konstanten sind und die Gleichheit als Gleichheit von rationalen Funktionen zu verstehen ist. Multipliziert man die Gleichung mit der Nennerfunktion $t(t+1)$, dann erhält man die folgende Polynomgleichheit:

$$1 = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A.$$

Ein Koeffizientenvergleich der auf beiden Seiten der Gleichheit stehenden Polynome liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A+B &= 0, \end{aligned}$$

mit den Unbekannten A, B . Die Lösung ergibt $B = -A = -1$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \ln|t| - \ln|1+t| + c \\ &= \ln e^x - \ln(1+e^x) + c \\ &= x - \ln(1+e^x) + c. \end{aligned}$$

4. Es soll nun $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$ berechnet werden.

9/1/21/4

Wir versuchen dies erneut mit der Partialbruchzerlegung. Hierzu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung (Gleichheit von Funktionen) mit der Nennerfunktion $x^2(x^2+1)$, dann entsteht eine Gleichung zwischen zwei Polynomen:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \\ &= Ax^2 + A + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Dx^2 \\ &= (B+C)x^3 + (A+D)x^2 + Bx + A. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man hieraus sofort:

$$A = 1, D = -A = -1, B = 0, C = 0.$$

Also

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx &= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + c.\end{aligned}$$

5. Will man das unbestimmte Integral von

9/1/21/5

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^m(x^2+bx+c)^n}$$

für den Fall bestimmen, daß x^2+bx+c keine reelle Nullstelle besitzt, dann macht man bei der Partialbruchzerlegung folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-a)^m(x^2+bx+c)^n} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \\ &\quad \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}.\end{aligned}$$

6. Hat man eine beliebige rationale Funktion $f(x)$ in der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$ gegeben, dann kann durch Polynomdivision immer erreicht werden, daß

9/1/21/6

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei der Grad von $r(x)$ kleiner ist als der Grad von $q(x)$.

Für die entsprechende Partialbruchzerlegung von $\frac{r(x)}{g(x)}$ macht man folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{(x-a_1)^{m_1} \dots (x-a_k)^{m_k} (x^2+b_1x+c_1)^{n_1} \dots (x^2+b_lx+c_l)^{n_l}} &= \\ \frac{A_{11}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \dots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \dots + \frac{A_{km_k}}{(x-a_k)^{m_k}} + \\ \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_{1n_1}x+C_{1n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} + \dots + \frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2+b_lx+c_l} + \dots + \frac{B_{ln_l}x+C_{ln_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}},\end{aligned}$$

wobei $q(x)$ schon als Produkt gegeben sei und die Faktoren $x^2+b_ix+c_i$ keine reellen Nullstellen besitzen sollen. Die Multiplikation der Gleichung mit $q(x)$ liefert wieder eine Polynomgleichung. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die Koeffizienten A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} berechnen kann. Mit dieser Methode bleiben schließlich nur noch Integrale über Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^l}$$

zu berechnen.

Bei der ersten Funktion substituiert man $t = x - a$, und löst auf diese Weise das Integral.

Bei der zweiten Funktion ist $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - (\frac{b}{2})^2$. Da $x^2 + bx + c$ keine reelle Nullstelle besitzt, ist $c - (\frac{b}{2})^2 > 0$. Der Einfachheit wegen setzen wir $c - (\frac{b}{2})^2 := r^2$.

Substituiert man jetzt $t = x + \frac{b}{2}$, so ist $dx = dt$ und $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + r^2 = t^2 + r^2 = r^2((\frac{t}{r})^2 + 1)$.

Folglich erhält man

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^l} dx = \int \frac{At + (B - A \cdot \frac{b}{2})}{r^{2l} \left(\left(\frac{t}{r} \right)^2 + 1 \right)^l} dt = \frac{1}{r^{2l}} \int \frac{At + C}{\left(\left(\frac{t}{r} \right)^2 + 1 \right)^l} dt := (\star),$$

wobei $C := B - A \cdot \frac{b}{2}$.

Substituiert man erneut $u := \frac{t}{r}$, also $t = r \cdot u$ und $dt = r \cdot du$, so ergibt sich

$$(\star) = \frac{1}{r^{2l}} \int \frac{r \cdot Au + C}{(u^2 + 1)^l} \cdot r du = \frac{1}{r^{2l-2}} \int \frac{Au + C^*}{(u^2 + 1)^l} du, \quad \text{mit } C^* = \frac{C}{r}.$$

Es bleiben schließlich nur noch die Integrale

$$\int \frac{u}{(u^2 + 1)^l} du \quad \text{und} \quad \int \frac{du}{(u^2 + 1)^l}$$

zu berechnen.

Bei dem ersten Integral substituiert man $v := u^2 + 1 \implies dv = 2u du$, also

$$\int \frac{u}{(u^2 + 1)^l} du = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^l},$$

und dies ist ein Grundintegral.

Das zweite Integral ist für $l = 1$ ein Grundintegral; für $l > 1$ führt folgender Ansatz schließlich zum Ziel:

$$\int \frac{du}{(u^2 + 1)^l} = \frac{a^* u + b^*}{(u^2 + 1)^{l-1}} + c^* \int \frac{du}{(u^2 + 1)^{l-1}}, \quad (\star\star)$$

wobei a^*, b^*, c^* zu bestimmende Konstanten sind. (Wenn dieser Ansatz gelingt, dann hat man das Problem „von $l > 1$ auf $l - 1 \geq 1$ “ reduziert. Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt das Ausgangsintegral auf ein Grundintegral zurück.)

Differenziert man die Gleichung $(\star\star)$, dann erhält man (analog wie bei der Partialbruchzerlegung) eine Gleichheit von rationalen Funktionen. Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich a^*, b^*, c^* bestimmen lassen.

Es ergibt sich:

$$a^* = \frac{1}{2(l-1)}, \quad b^* = 0, \quad c^* = \frac{2l-3}{2l-2}.$$

(vgl. auch Literaturangabe [2], Band 3, Nr. 13, Seite 38)