

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\iff (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Definition. (Divergenz von Reihen)

4/1/2

$\sum a_i$ ist divergent $\iff \sum a_i$ ist nicht konvergent.

Korollar 3. Ist (a_i) keine Nullfolge, so ist $\sum a_i$ divergent.

4/1/12

Satz 4.10 (Quotientenkriterium)

4/1/38

Es sei $a_i \neq 0$ für jedes i . Dann gilt:

(1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

(2) Ist $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für jedes i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

4.4 Potenzreihen

Definition. (Potenzreihe)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ Potenzreihe in $x-a$ mit den Koeffizienten a_n .

Beispiele.

2. Sei $a_n = n$, $a = 0$, also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$.

4/4/3/2

Diese Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$ (man kann wieder das Quotientenkriterium benutzen). Der Fall $|x| = 1$ muß gesondert untersucht werden.

Offenbar ist aber $(n \cdot |x|)$ keine Nullfolge, folglich ist die Reihe für $|x| = 1$ divergent.