

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.9 Die rationalen Funktionen sind stetig.

5/3/5

Bemerkung. Bisher ist $\sqrt[n]{x}$ nur für $n \geq 2$ und $x \geq 0$ definiert. Für ungerade n lässt sich $\sqrt[n]{x}$ auch in dem Bereich $x < 0$ definieren. Hierfür legen wir fest:

5/3/9

$$\sqrt[n]{x} := -\sqrt[n]{-x}.$$

Für $n = 1$ gelte generell: $\sqrt[n]{x} = x$.

Satz 5.10 Die entwickelten algebraischen Funktionen sind stetig.

5/3/12

Bemerkung. Ist $f(x) = x^n$, $x \geq 0$, dann ist offenbar $\sqrt[n]{x}$ die Umkehrfunktion von f . Nach Satz 5.8 ist f^{-1} in $[0, \infty)$ stetig. Für ungerade n ist f in \mathbb{R} injektiv und somit die Umkehrfunktion $\sqrt[n]{x}$ in ganz \mathbb{R} definiert und stetig. (vgl. auch Abb. 5.17). Für gerade n ist f in $(-\infty, 0]$ definiert und injektiv, folglich besitzt f in $(-\infty, 0]$ ebenfalls eine Umkehrfunktion $-\sqrt[n]{x}$ (vgl. Abb. 5.16).

5/3/14

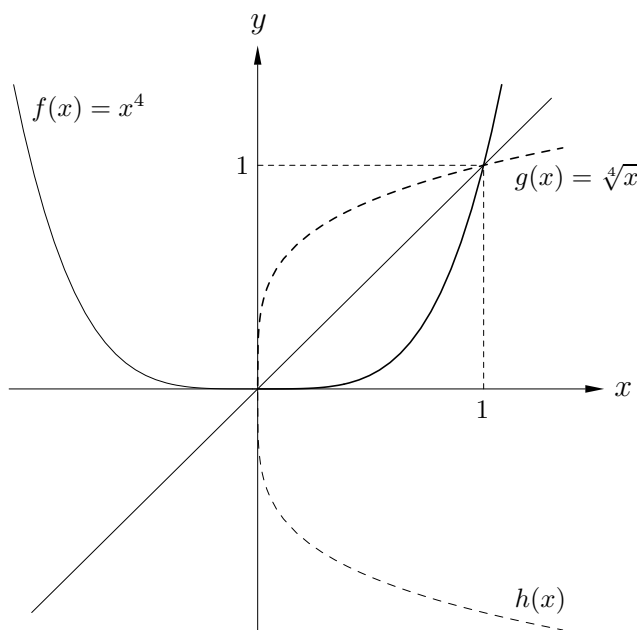


Abb. 5.16 Für gerade n verlaufen die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ und $h(x) = -\sqrt[n]{x}$ ähnlich wie die von f , g und h in dieser Abbildung und in Abb. 5.6. (Dort wird der Spezialfall $n = 2$ und hier der Fall $n = 4$ dargestellt.) g ist die Umkehrfunktion von f für $x \geq 0$ und h die von f für $x \leq 0$.

Die nächste Abbildung zeigt den analogen Fall für ungerade n . Hierfür existiert die inverse Funktion im gesamten Definitionsbereich von f .

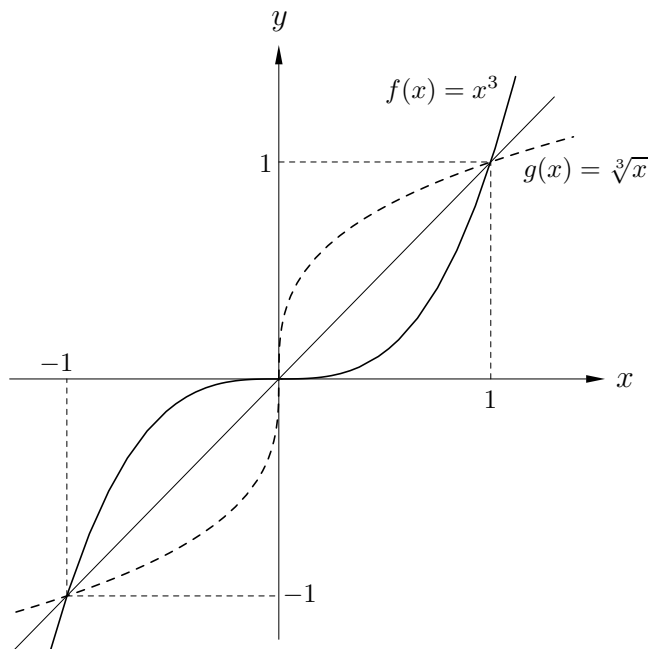


Abb. 5.17 Für ungerade n verlaufen die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ähnlich wie die von f und g in dieser Abbildung. (Hier wird der Spezialfall $n = 3$ dargestellt.) Da f im gesamten Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$ injektiv ist, besitzt f dort auch eine Umkehrfunktion, nämlich g (Graph von g dick gestrichelt).

(3) Elementare transzendente Funktionen

Neben den algebraischen Funktionen gibt es noch weitere, nämlich die sog. transzendenten Funktionen.

Satz 5.11 Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

5/3/19

- (1) $D(\exp) = \mathbb{R}$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).
- (3) $\exp(0) = 1$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, und
für $x > 0$ ist $1 < \exp(x)$.
- (4) \exp ist streng monoton wachsend
(folglich ist \exp injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion).
- (5) $\exp(1) = e$ ($e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).
- (6) Für rationale $x = \pm \frac{m}{n}$ ist $\exp(x) = e^{\pm \frac{m}{n}}$
(für irrationale x ist e^x bisher nicht definiert!).
- (7) \exp ist stetig.

Bemerkung. Bisher ist e^x nur für rationale x definiert. Nach Satz 5.11 (6) gilt für rationale x stets $e^x = \exp(x)$. Wir erweitern jetzt den Definitionsbereich der Funktion e^x auf ganz \mathbb{R} wie folgt:

5/3/21

Satz 5.12 Für e^x gilt:

5/3/24

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- (2) e^x nimmt jeden Wert $y > 0$ genau einmal an
($\implies W(e^x) = \{y : y > 0\} = (0, \infty)$).

Satz 5.13 \ln hat folgende Eigenschaften:

5/3/29

- (1) $\ln e = 1$, $\ln e^x = x$ und $e^{\ln x} = x$.
- (2) \ln ist stetig.
- (3) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus).
- (4) $\ln 1 = 0$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$;
für $0 < x < 1$ ist $\ln x < 0$, und für $1 < x$ ist $0 < \ln x$.
- (5) \ln ist streng monoton wachsend.
- (6) Für rationale r und reelle $x > 0$ gilt: $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$
(für irrationale r ist x^r noch nicht definiert!).
- (7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

Satz 5.14 Es seien $a, b > 0$. Dann gilt:

5/3/34

- (1) $\ln a^x = x \cdot \ln a$,
- (2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
- (3) $(a^x)^y = a^{xy}$,
- (4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,
- (5) a^x ist stetig.
- (6) Für $0 < a < 1$ ist a^x streng monoton fallend, und
für $1 < a$ ist a^x streng monoton wachsend,
für $a = 1$ ist a^x konstant 1.
- (7) Für $0 < a < 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$, und
für $a < 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Folgerung. Aus der Definition ergibt sich sofort:

5/3/39

$D(\log_a x) = W(a^x) = (0, \infty)$ und $W(\log_a x) = D(a^x) = \mathbb{R}$.

Satz 5.15 Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Dann gilt:

5/3/40

- (1) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.
- (2) $\log_a x$ ist stetig.
- (3) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
- (4) Für $0 < a < 1$ ist $\log_a x$ streng monoton fallend,
für $1 < a$ ist $\log_a x$ streng monoton wachsend.
- (5) Für $b > 0$ ist $\log_a b^x = x \cdot \log_a b$ und $\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \cdot \log_a x$.

Bemerkung. Die Eigenschaften von x^a folgen entsprechend der Definition sofort aus den Eigenschaften von e^x und $\ln x$. Insbesondere ist x^a stetig und 5/3/44

$$D(x^a) = D(\ln x) = (0, \infty) \quad \text{und} \quad W(x^a) = \begin{cases} (0, \infty), & \text{für } a \neq 0 \\ \{1\}, & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Weiterhin ist x^a für $a \neq 0$ streng monoton. Folglich besitzt x^a eine Umkehrfunktion, die ebenfalls eine Potenzfunktion ist, nämlich die Funktion $x^{\frac{1}{a}}$ (vgl. Abb. 5.20).

Für gewisse Exponenten a läßt sich x^a auch in $(-\infty, 0)$ definieren, z.B. für alle ganzzahligen a und auch für alle $a = \frac{1}{n}$, falls n ungerade ist. Dann ist nämlich $x^a = x^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{-x}$, und für $-x > 0$ ist die n -te Wurzel schon definiert.

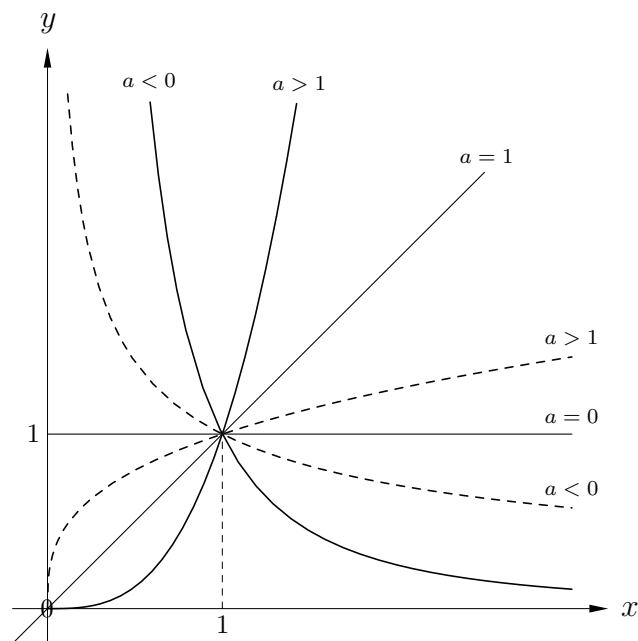


Abb. 5.20 Die Abbildung zeigt die Potenzfunktion $f(x) = x^a$ mit verschiedenen Exponenten $a \in \mathbb{R}$. Für $a \neq 0$ und $x > 0$ ist f injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion. Die gestrichelten Kurven zeigen die Umkehrfunktionen von $f(x) = x^a$ für $a > 1$ bzw. $a < 0$. Die inverse Funktion von x^a ist $x^{\frac{1}{a}}$ und somit wieder eine Potenzfunktion. Für $a = 1$ (also $x^a = x = I(x)$) ist die Umkehrfunktion identisch mit der Ausgangsfunktion $I(x)$. Ist $a = 0$, dann ist x^a konstant.

Trigonometrische Funktionen

In der Schule werden \sin und \cos in der Regel am Einheitskreis eingeführt (vgl. Abb. 5.21 und 5.22).

Der Anschauung entnimmt man:

- (1) $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
- (2) \sin und \cos sind periodisch mit der kleinsten Periode 2π .
- (3) \sin ist ungerade, d.h., $\sin(-x) = -\sin x$.
- (4) \cos ist gerade, d.h., $\cos(-x) = \cos x$.
- (5) \sin ist an der Stelle 0 stetig. Hierbei benutzt man, daß $|\sin x| \leq |x|$ ist, was wiederum der Anschauung entnommen wird.

(6) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (hier wird der Satz des Pythagoras vorausgesetzt).

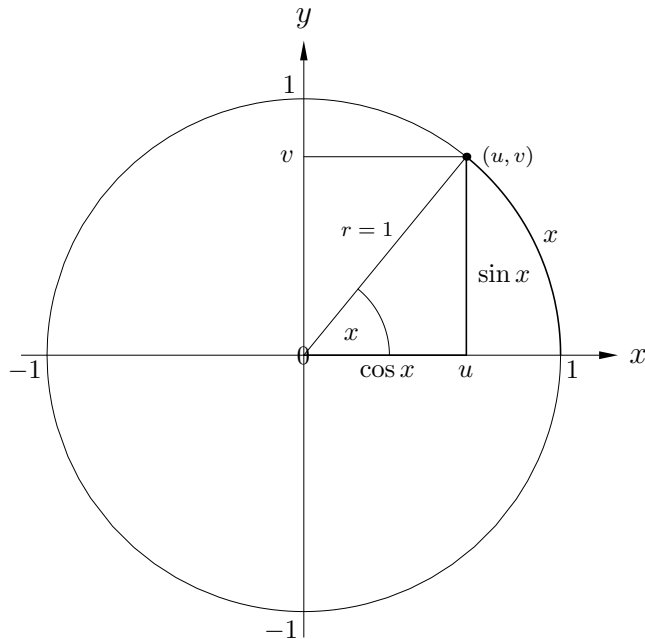


Abb. 5.21 Die Abbildung zeigt, wie am Einheitskreis (:= Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(0,0)$) die Funktionen \sin und \cos eingeführt werden können. Der Winkel x ist in Bogenmaß gemessen (:= Länge des durch dickere Strichstärke hervorgehobenen Kreisbogenstücks). \cos bzw. \sin sind dann definiert durch: $\cos x := u$, $\sin x := v$.

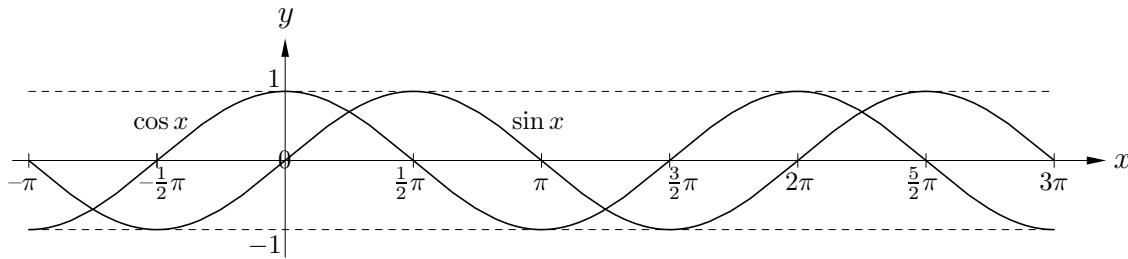


Abb. 5.22 zeigt \sin und \cos im Intervall $[-\pi, 3\pi]$

Die Vorteile dieser Methode bestehen darin, daß der Schüler wesentliche Eigenschaften der ansonsten komplizierten Funktionen der Anschauung entnimmt. Die Nachteile sind allerdings darin zu sehen, daß die Anschauung als Beweismittel überhaupt zugelassen wird und daß z.B. die Zahl π und Eigenschaften des Kreises als bekannt vorausgesetzt werden.

Wir kommen jetzt zu einer anderen Definition der trigonometrischen Funktionen.

Hierzu betrachten wir die Exponentialfunktion e^z , die bekanntlich mit Hilfe der Potenzreihe $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ definiert ist. Diese Potenzreihe ist (wie früher gezeigt wurde) für alle komplexen Zahlen z absolut und damit auch unbedingt konvergent. Folglich ist $\exp(z)$ auch in der gesamten komplexen Ebene definiert. Wir betrachten jetzt den Spezialfall $z = ix$ und berechnen von e^{ix} den Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{Df } \cos x} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{Df } \sin x}.
\end{aligned}$$

Also $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Damit ergibt sich die folgende Definition.

Satz 5.16 *sin und cos haben folgende Eigenschaften:*

5/3/47

- (1) *sin und cos sind in \mathbb{R} definiert, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.*
- (2) *sin ist ungerade und cos ist gerade.*
- (3) *$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ ($\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$).*
- (4) *$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ ($\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).*
- (5) *$\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$.*
- (6) *$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$.*
- (7) *$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$).*
- (8) *sin und cos sind stetig.*

Bemerkung. Die Eigenschaften (3) – (6) im Satz 5.16 heißen auch *Additionstheoreme* von sin und cos.

5/3/49

Im folgenden wird die Zahl π definiert. Es genügt offensichtlich $\frac{\pi}{2}$ festzulegen, und dies wird sich als kleinste positive Nullstelle von \cos erweisen. Dazu müssen wir zeigen, daß \cos überhaupt eine kleinste positive Nullstelle besitzt. Hierzu benötigen wir einige Lemmata.

Lemma 1. $\cos 2 < 0$.

Korollar. *cos hat in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.*

5/3/55

Bemerkung. Mit Hilfe der Additionstheoreme lassen sich weitere Eigenschaften für sin und cos herleiten.

5/3/58

- (1) Es gilt $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ speziell für $x = \frac{\pi}{2}$. Wegen $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ist $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$.
Weiterhin ist $\sin x > 0$ für $x \in (0, 2)$. Folglich ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

$$(2) \quad \cos \pi = \cos \left(\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=0} \right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = -1 \quad \text{usw.}$$

Satz 5.17 \sin und \cos sind periodisch mit der Periode 2π , und es ist $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

5/3/60

Bemerkung. Aus der Definition und den Eigenschaften von \sin und \cos erhält man sofort die wichtigsten Eigenschaften von \tan und \cot . Insbesondere gilt:

5/3/64

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\}, \quad W(\tan) = \mathbb{R};$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\}, \quad W(\cot) = \mathbb{R}.$$

\tan und \cot sind als Quotienten von stetigen Funktionen wieder stetig;

\tan und \cot sind wie \sin und \cos periodisch, allerdings mit der Periode π .

Ähnlich wie \sin und \cos lassen sich auch \tan und \cot am Einheitskreis geometrisch interpretieren (vgl. Abb 5.21 und 5.24).

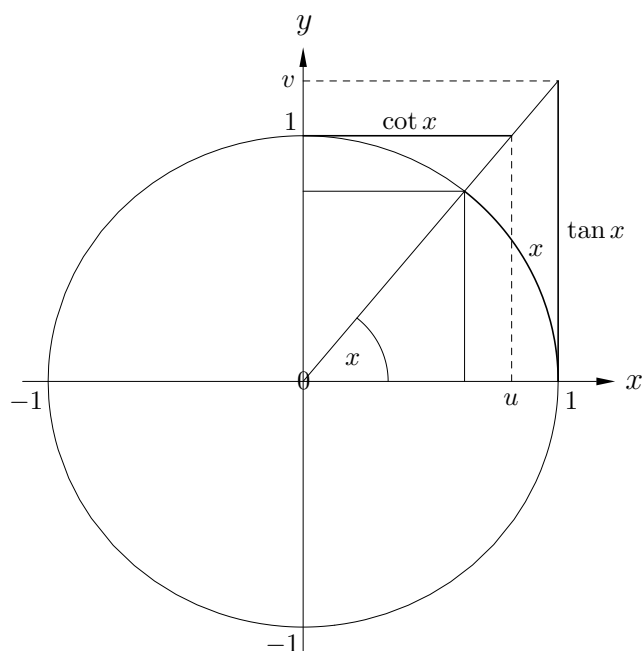


Abb. 5.24 In der Abbildung ist zu erkennen, wie am Einheitskreis die Funktionen \tan und \cot in Abhängigkeit von dem Winkel x (alle hervorgehoben durch dickere Strichstärke; x gemessen in Bogenmaß) veranschaulicht werden können. \cot bzw. \tan sind dann definiert durch: $\cot x := u$, $\tan x := v$.

Die trigonometrischen Funktionen \sin , \cos , \tan , \cot sind als periodische Funktionen **nicht** in ihren gesamten Definitionsbereichen injektiv. In den (maximalen) Teilintervallen, in denen sie jedoch injektiv sind (dort sind sie auch stetig und daher streng monoton), besitzen sie Umkehrfunktionen (die sog. *Arcus-Funktionen*; Arcus oder Arkus := Bogenmaß eines Winkels), die der Reihe nach mit \arcsin , \arccos , \arctan , arccot bezeichnet werden.

Zur Veranschaulichung der Arcus-Funktionen betrachte man zunächst die Abb. 5.21. Dort ist der Winkel x in Bogenmaß gegeben (das ist bekanntlich die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten $(1,0)$ und (u,v) im entgegengesetzten Uhrzeigersinn). Für fixiertes x ist $\sin x$ symbolisiert durch die Strecke der Länge v zwischen den Punkten $(u,0)$ und (u,v) . Also

$\sin x = v \implies \arcsin(\sin x) = \arcsin v = x$ ($:=$ die zu $\sin x$ gehörende Bogenlänge).

Das Analoge gilt für Cosinus, Tangens und Cotangens.

Abschließend werden noch die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen (in geeigneten Intervallen) dargestellt (vgl. Abb. 5.25 – 5.28). Sinus wird in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ und in $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ betrachtet, Cosinus in $[0, \pi]$ und in $[\pi, 2\pi]$. Tangens und Cotangens werden in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bzw. in $[0, \pi]$ dargestellt.

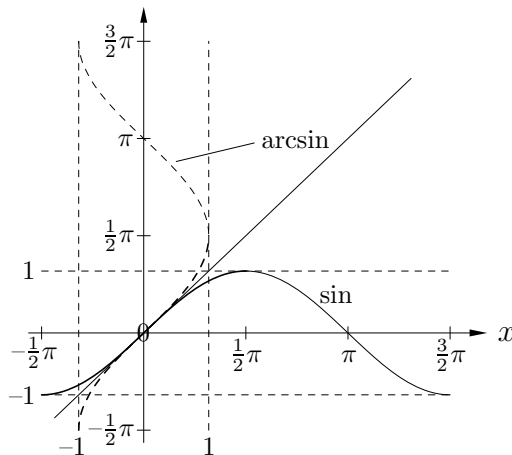


Abb. 5.25 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Sinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Sinus injektiv ist.

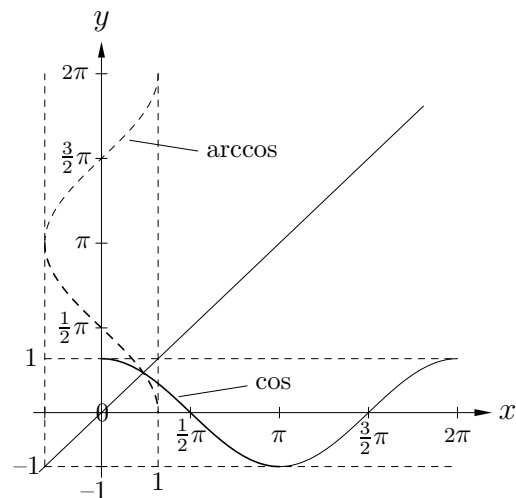


Abb. 5.26 Die gestrichelten Kurven entsprechender Strichstärke geben die jeweilige Umkehrfunktion des Cosinus in den betrachteten Intervallen an, in denen der Cosinus injektiv ist.

Analog wie in den vorhergehenden Abbildungen verfahren wir jetzt noch mit Tangens und Cotangens.

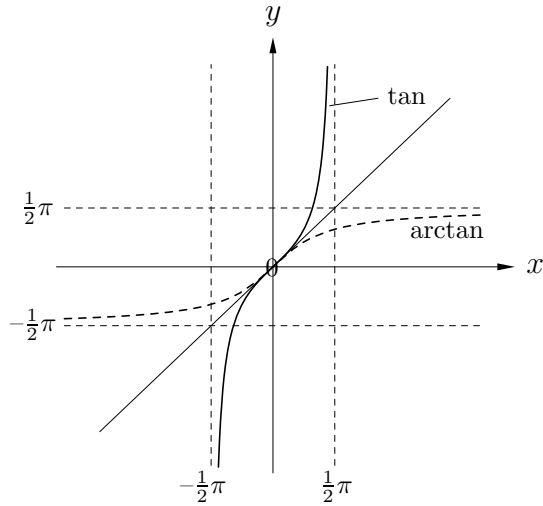


Abb. 5.27 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Tangens in dem Intervall $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

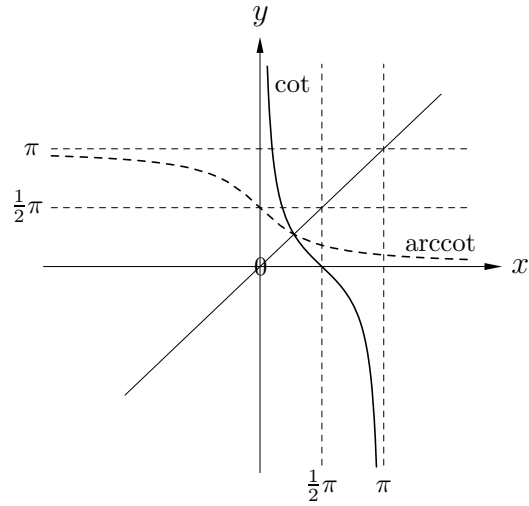


Abb. 5.28 Die gestrichelte Kurve zeigt die Umkehrfunktion des Cotangens in dem Intervall $(0, \pi)$.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 5

- wichtige Eigenschaften dieser Funktionen (Definitionsbereich, Stetigkeit, grober Verlauf, Werte der Funktionen an ausgezeichneten Stellen),

5/6/9