

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .

(2) (a_n) ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Satz 3.4 Jede beschränkte Folge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

3/1/17

Satz 3.5 (a_n) konvergiert gegen $a \iff$ jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a .

3/1/21

Korollar. Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

3/1/25

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Satz 5.1 Ist f streng monoton, dann besitzt f eine Umkehrfunktion.

5/1/13

5.2 Stetigkeit

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist stetig

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Korollar (Zwischenwertsatz)

5/2/23

Ist f in $[a, b]$ stetig, $d \in \mathbb{R}$ beliebig und $f(a) < d < f(b)$ oder $f(a) > d > f(b)$, dann existiert ein $c \in (a, b)$, so daß $f(c) = d$.

Satz 5.7 Ist f in $[a, b]$ injektiv und stetig, dann ist f in $[a, b]$ streng monoton.

5/2/25

($\implies f$ besitzt in $[a, b]$ eine Umkehrfunktion.)

Satz 5.8 Ist f in $[a, b]$ injektiv und stetig, dann ist f^{-1} in $[\alpha, \beta]$ stetig, wobei $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ und $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.

5/2/27

Beweis. Nach Satz 5.7 ist f in $[a, b]$ streng monoton.

5/2/28

Sei o.B.d.A. f in $[a, b]$ streng monoton wachsend und $\alpha := f(a)$, $\beta := f(b)$ (für „fallend“ verläuft der Beweis analog).

Dann ist $f(a) < f(b)$, und nach dem Zwischenwertsatz werden alle Werte d mit $f(a) < d < f(b)$ durch f angenommen, also $f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [\alpha, \beta]$.

Sei $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Wir haben zu zeigen, daß f^{-1} in γ stetig ist.

Dazu sei (y_n) eine Folge mit $y_n \in [\alpha, \beta]$ und $y_n \rightarrow \gamma$.

Wegen $y_n, \gamma \in [\alpha, \beta] = f([a, b])$ existieren $x_n, c \in [a, b]$, so daß $f(x_n) = y_n$ und $f(c) = \gamma$. Damit ist (x_n) eine beschränkte Folge in $[a, b]$. Folglich besitzt (x_n) einen Häufungspunkt c_0 und eine gegen c_0 konvergierende Teilfolge $(x_{n_i}) : x_{n_i} \rightarrow c_0$. Da $[a, b]$ abgeschlossen ist, gehört c_0 zu $[a, b]$. Aus der Stetigkeit von f in $[a, b]$ folgt somit $f(x_{n_i}) \longrightarrow f(c_0)$.

Da $y_n \rightarrow \gamma$ und (y_{n_i}) eine Teilfolge von (y_n) ist, gilt auch $y_{n_i} \rightarrow \gamma$. Also $y_{n_i} \rightarrow \gamma$ und $y_{n_i} = f(x_{n_i}) \longrightarrow f(c_0)$, folglich ist

$$f(c) = \gamma = f(c_0).$$

Gäbe es einen weiteren Häufungspunkt c' von (x_n) , so gäbe es eine Teilfolge (x'_{n_i}) von (x_n) mit $x'_{n_i} \rightarrow c'$.

Analog wie im vorhergehenden Teil des Beweises existiert eine Teilfolge (y'_{n_i}) von (y_n) mit $y'_{n_i} = f(x'_{n_i}) \longrightarrow f(c')$. Wegen $y'_{n_i} \rightarrow \gamma$ gilt dann auch

$$f(c') = \gamma = f(c).$$

Aus der Injektivität von f folgt schließlich $c' = c_0 = c$. Die beschränkte Folge (x_n) besitzt also genau einen Häufungspunkt, und dieser ist c , also $x_n \rightarrow c$.

Nach Voraussetzung gilt: $y_n \rightarrow \gamma$. Folglich ist

$$f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(x_n)) = x_n \longrightarrow c = f^{-1}(f(c)) = f^{-1}(\gamma),$$

d.h., f ist an der Stelle γ stetig. \square