

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.8 Länge von Kurven

Satz 9.23 Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist \mathfrak{k} rektifizierbar, und es gilt

9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k (f'_i(t))^2} dt.$$

Beispiele.

(3). Länge der Schraubenlinie (vgl. Abb. 9.22).

9/8/15/3

Wir betrachten eine Schraubenlinie mit dem Radius r und zwei „Gewindegängen“. Es sei $f : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$, $c \neq 0$. f ist in $[0, 4\pi]$ stetig differenzierbar und $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c)$. Dann ist

$$|f'(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2} = \sqrt{r^2 + c^2}.$$

Damit erhält man

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2 + c^2} dt = \sqrt{r^2 + c^2} \cdot 4\pi.$$