

# Kapitel 1

## Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

### Induktionsaxiom:

Es sei  $E$  eine Eigenschaft für natürliche Zahlen  $n$ . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage  $\forall m E(m)$  zu beweisen, genügt es:

1.  $E(0)$  zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2.  $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$  nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und zeigt:

$$\text{Wenn } E(n), \text{ so } E(n+1).$$

$E(n)$  heißt *Induktionsvoraussetzung*,  $E(n+1)$  *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a):  $E(n)$  ist falsch.

Dann ist die Implikation  $E(n) \rightarrow E(n+1)$  aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b):  $E(n)$  ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von  $E(n+1)$  zu zeigen.

**Achtung:** Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges  $n$  wird vorausgesetzt, daß  $E(n)$  schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

#### 2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

##### IV. $\mathbb{R}$ genügt dem Intervallschachtelungsaxiom:

2/1/6

Es sei  $([a_n, b_n])_{n=0,1,2,\dots}$  eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in  $\mathbb{R}$ , so daß für jede natürliche Zahl  $n$  gilt:  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ . Dann gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c \leq b_n$ , für jede natürliche Zahl  $n$ .

**Anschauliche Deutung des Axioms:** Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen“; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.**

3/1/2

- (1)  $(a_n)$  *konvergiert* (oder ist *konvergent*) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert.
- (2)  $(a_n)$  *divergiert* (oder ist *divergent*) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nicht konvergent in  $\mathbb{R}$ .

#### 3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

**Satz 3.12** Zu jeder reellen Zahl  $a$  existiert eine Cauchyfolge  $(a_n)$  von rationalen Zahlen, so daß  $\lim a_n = a$ . 3/2/1

**Beweis.** (Idee) Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Man konstruiert eine Intervallschachtelung  $([a_n, b_n])$  von rationalen Zahlen mit  $a_n \leq a \leq b_n$  und  $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ . 3/2/2

Dazu seien  $a_0, b_0$  beliebige rationale Zahlen mit  $a_0 < a \leq b_0$ .

Weiterhin seien  $a_n, b_n$  (nach Induktionsvoraussetzung) schon mit den geforderten Eigenschaften gegeben.

Ist  $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ , dann ist  $c_{n+1} \in \mathbb{Q}$ .

Jetzt definieren wir  $a_{n+1}, b_{n+1}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= c_{n+1} \quad \text{und} \quad b_{n+1} := b_n, \quad \text{falls} \quad c_{n+1} < a \quad \text{und} \\ a_{n+1} &:= a_n \quad \text{und} \quad b_{n+1} := c_{n+1}, \quad \text{falls} \quad c_{n+1} \geq a. \end{aligned}$$

Behauptung:  $a_n \rightarrow a$  (und  $b_n \rightarrow b$ ).

Es ist  $a_n \leq a \leq b_n \implies a - a_n \leq b_n - a_n < \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies a_n \rightarrow a. \quad \square$