

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Satz 7.11** (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei  $I$  ein Intervall und  $a \in I$ . Ist  $f$  in  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes  $x \in I$  ein  $\vartheta (= \vartheta(x))$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

( $R_n(x)$  heißt Lagrange'sches Restglied,  $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  heißt Taylorpolynom, wobei  $f^{(0)}(x) := f(x)$ , und  $f(x) = p(x) + R_n(x)$  heißt Taylorsche Formel.)

#### 7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

**Beweis.** Sei  $f''(c) > 0$  (den Fall  $f''(c) < 0$  beweist man analog).

7/3/25

Dann gilt nach der Definition der Differenzierbarkeit von  $f'$  in  $c$

$$0 < f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Nach den Eigenschaften des Grenzwertes gibt es eine Umgebung  $U(c)$ , so daß

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \quad \text{für alle } x \in U(c).$$

Wegen  $f'(c) = 0$  gilt also für alle  $x \in U(c)$

$$\frac{f'(x)}{x - c} > 0.$$

Folglich haben  $f'(x)$  und  $x - c$  in  $U(c)$  stets das gleiche Vorzeichen.

Wenn also  $x > c$ , so  $f'(x) > 0$ ,

und wenn  $x < c$ , so  $f'(x) < 0$ .

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c_x),$$

wobei  $c_x$  zwischen  $x$  und  $c$  liegt, also  $c < c_x < x$  bzw.  $x < c_x < c$ .

Da die Funktionen  $f'(x)$  und  $x - c$  links und rechts von  $c$  jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen, folgt aus der letzten Gleichheit

$$f(x) - f(c) = f'(c_x) \cdot (x - c) > 0 \quad \text{für } x \in U(c) \setminus \{c\} \quad \implies$$

$$f(x) > f(c) \quad \text{für } x \in U(c) \setminus \{c\}.$$

Folglich besitzt  $f$  in  $c$  ein lokales Minimum.  $\square$

**Satz 7.17** Sei  $a < b$ ,  $f$  in  $I = (a, b)$   $2n$ -mal differenzierbar und  $c \in I$ .  
Ist  $f'(c) = \dots = f^{(2n-1)}(c) = 0$  und  $f^{(2n)}(c) > 0$  (bzw.  $f^{(2n)}(c) < 0$ ),  
dann besitzt  $f$  in  $c$  ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

7/3/26

**Beweis.** (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Taylor.)

7/3/27

Sei  $f^{(2n)}(c) > 0$  (für  $f^{(2n)}(c) < 0$  verläuft der Beweis analog).

Dann gilt

$$0 < f^{(2n)}(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(2n-1)}(x) - f^{(2n-1)}(c)}{x - c} \implies$$

$$\frac{f^{(2n-1)}(x) - f^{(2n-1)}(c)}{x - c} > 0$$

für alle  $x \in U(c) \setminus \{c\}$ , wobei  $U(c)$  eine hinreichend kleine Umgebung von  $c$  ist.

Wegen  $f^{(2n-1)}(c) = 0$  gilt analog wie im Beweis von Satz 7.16, daß  $f^{(2n-1)}$  und  $x - c$  links und rechts von  $c$  jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen.

Aus dem Satz von Taylor für  $2n - 2$  erhält man

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} \cdot (x - c) + \dots + \frac{f^{(2n-2)}(c)}{(2n-2)!} \cdot (x - c)^{2n-2} +$$

$$\frac{f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))}{(2n-1)!} \cdot (x - c)^{2n-1}.$$

Wegen  $f'(c) = \dots = f^{(2n-2)}(c) = 0$  gilt

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))}{(2n-1)!} \cdot (x - c)^{2n-1} > 0,$$

denn  $2n - 1$  ist ungerade, folglich haben  $x - c$  und  $(x - c)^{2n-1}$  links und rechts von  $c$  gleiches Vorzeichen, und damit haben auch  $f^{(2n-1)}(c + \vartheta(x - c))$  und  $(x - c)^{2n-1}$  gleiches Vorzeichen.

Es ist also  $f(x) > f(c)$  für alle  $x \in U(c) \setminus \{c\}$  und somit  $f(c)$  ein lokales Minimum von  $f$ .  $\square$