

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.1 Operationen für Funktionen

**Definition.** (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ .

(1)  $f$  ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in  $M$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x_1, x_2 \in M$  gilt: Wenn  $x_1 \leq x_2$ , so  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (bzw.  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ).

(2)  $f$  ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in  $M$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x_1, x_2 \in M$  gilt: Wenn  $x_1 < x_2$ , so  $f(x_1) < f(x_2)$  (bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$ ).

#### 5.2 Stetigkeit

**Definition.** (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .

(1)  $f$  ist *stetig in*  $M$

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist in jedem Punkt  $a \in M$  stetig.

(2)  $f$  ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$   $f$  ist im gesamten Definitionsbereich  $D(f)$  stetig.

**Definition.** (*Grenzwert bei Funktionen*)

5/2/6

Es sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$  ( $a$  muß nicht selbst zu  $D(f)$  gehören).

$f$  besitzt an der Stelle  $a$  den *Grenzwert*  $c$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  mit  $x \neq a$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

**Bez.:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  oder  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$

**Definition.** (*uneigentlicher Grenzwert*)

5/2/7

Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D(f)$ .

$f$  hat an der Stelle  $a$  den *uneigentlichen Grenzwert*  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ )

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  mit  $x \neq a$  gilt: Wenn  $|x - a| < \delta$ , so  $f(x) > c$  (bzw.  $f(x) < c$ ).

**Bez.:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ )

**Definition.** (*Grenzwert im Unendlichen*)

5/2/9

Es sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $D(f) = [a, \infty)$  (bzw.  $D(f) = (-\infty, a]$ ).

$f$  besitzt für  $x \rightarrow \infty$  (bzw. für  $x \rightarrow -\infty$ ) den *Grenzwert*  $c$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $b \in \mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt: Wenn  $x > b$  (bzw.  $x < b$ ), so  $|f(x) - c| < \varepsilon$ .

**Bez.:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ )

### 5.3 Elementare Funktionen

**Definition.** (*natürlicher Logarithmus*)

5/3/27

Die Umkehrfunktion von  $e^x$  heißt *natürlicher Logarithmus*.

**Bez.:**  $\ln(x)$  oder  $\ln x$

**Satz 5.13**  $\ln$  hat folgende Eigenschaften:

5/3/29

- (1)  $\ln e = 1$ ,  $\ln e^x = x$  und  $e^{\ln x} = x$ .
- (2)  $\ln$  ist stetig.
- (3)  $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$  (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus).
- (4)  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ ;  
für  $0 < x < 1$  ist  $\ln x < 0$ , und für  $1 < x$  ist  $0 < \ln x$ .
- (5)  $\ln$  ist streng monoton wachsend.
- (6) Für rationale  $r$  und reelle  $x > 0$  gilt:  $\ln(x^r) = r \cdot \ln x$   
(für irrationale  $r$  ist  $x^r$  noch nicht definiert!).
- (7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ .