

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

#### Definition.

3/1/2

- (1)  $(a_n)$  *konvergiert* (oder ist *konvergent*) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert.
- (2)  $(a_n)$  *divergiert* (oder ist *divergent*) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nicht konvergent in  $\mathbb{R}$ .

**Satz 3.1** Eine Folge  $(a_n)$  hat höchstens einen Grenzwert  
 (d.h.,  $(a_n)$  konvergiert gegen höchstens eine Zahl).

3/1/5

**Beweis.** Angenommen,  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$  und  $a \neq b$ .

3/1/6

Dann ist  $|a - b| > 0$ .

Nach Definition der Konvergenz gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  :  $|a_n - a| < \varepsilon$ , und  
 es existiert ein  $m_0$ , so daß für jedes  $n \geq m_0$  :  $|a_n - b| < \varepsilon$ .

Das gilt speziell für  $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$ .

Ist  $k = \max\{n_0, m_0\}$ , dann gilt für  $n \geq k$

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

Also

$$|a - b| < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{|a - b|}{2} = |a - b| \quad \text{!} \quad \square$$