

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Divergenz von Reihen*)

4/1/2

$\sum a_i$ ist *divergent* $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum a_i$ ist nicht konvergent.

Definition. (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$ ist *absolut konvergent* $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum |a_i|$ ist konvergent.

Beispiele.

1. (Anwendung des Leibniz-Kriteriums)

4/1/30/1

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}}_{:=a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent.

Offenbar ist $\sum a_n$ alternierend, $a_n \rightarrow 0$ und $|a_n| = \frac{1}{n+1}$ monoton fallend, folglich ist die betrachtete Reihe konvergent.

Sei $a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \implies a_0 = 1 > a > 0$

(vgl. Beweis zu Satz 4.6; mit dem späteren Korollar zu Satz 7.11 läßt sich leicht zeigen, daß $a = \ln 2$).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n}$$

(jeder dieser 2^n Summanden ist größer oder gleich $\frac{1}{2^{n+1}}$)

$$\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n.$$

Dann gilt:

$$S_{2^n} = S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \dots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\
&\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Potenzreihe*)

4/4/1

Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n .

Satz 4.20 Jede Potenzreihe besitzt einen Konvergenzradius ϱ , der auch 0 oder ∞ sein kann. 4/4/10

Bemerkung. Die offene Kreisscheibe in \mathbb{C} mit dem Mittelpunkt a und dem Radius ϱ (bzw. das offene Intervall in \mathbb{R} mit dem Mittelpunkt a und der Länge 2ϱ) heißt *Konvergenzgebiet* oder *Konvergenzkreis* (bzw. *Konvergenzintervall*) und a heißt *Mittelpunkt der Potenzreihe* $\sum a_n(x-a)^n$.

4/4/12

Innerhalb dieser offenen Kreisscheibe (bzw. des offenen Intervalls) konvergiert die Potenzreihe absolut, außerhalb divergiert sie; auf dem Rande kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (man betrachte das Beispiel $\sum \frac{x^n}{n}$ für $x = \pm 1$).