

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.4 Implizite Funktionen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der (nicht einfachen Problematik der) Auflösbarkeit von Gleichungssystemen. Die lineare Algebra stellt bekanntlich gut nutzbare Werkzeuge für die Auflösung von linearen Gleichungssystemen bereit. Diese Hilfsmittel versagen jedoch im nichtlinearen Fall. Zur Verdeutlichung der Auflösbarkeit solcher Systeme starten wir mit einem linearen Gleichungssystem, das gegeben ist durch

8/4/0

$$A\bar{x} = \bar{b}, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem ist bekanntlich genau dann lösbar (d.h. nach x_1, \dots, x_n auflösbar), wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt. Für den Fall, daß $m = n$ und der Rang von A ebenfalls n ist (d.h. die Determinante $\det A$ von A nicht null ist), läßt sich das Gleichungssystem stets eindeutig lösen. Ist das Gleichungssystem lösbar, $n > m$ und (nach eventueller Umsortierung der Koeffizienten)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \neq 0,$$

dann gibt es lineare Funktionen $f_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, f_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$, so daß

$$x_i = f_i(x_{m+1}, \dots, x_n) \text{ für } i = \dots, m.$$

Für $\bar{x} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ erhält man somit

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = f(\bar{x}).$$

Wir befassen uns jetzt mit beliebigen Gleichungssystemen. Dazu betrachten wir zunächst eine Gleichung mit zwei Unbekannten.

Definition. (*Implizit definierte Funktion*)

8/4/1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a, b)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{a})$ definiert und $f(a, b) = 0$. Weiterhin seien $\varepsilon, \delta > 0$, jedoch so klein, daß $U_\delta(a) \times U_\varepsilon(b) \subseteq U(\bar{a})$.

Durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist in der Umgebung $U_\delta(a)$ eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ implizit definiert

$\overline{\text{Def}}$ Für jedes $x \in U_\delta(a)$ gibt es genau ein $y \in U_\varepsilon(b)$, so daß $f(x, y) = 0$ und $y = g(x)$ (insbesondere ist $b = g(a)$).

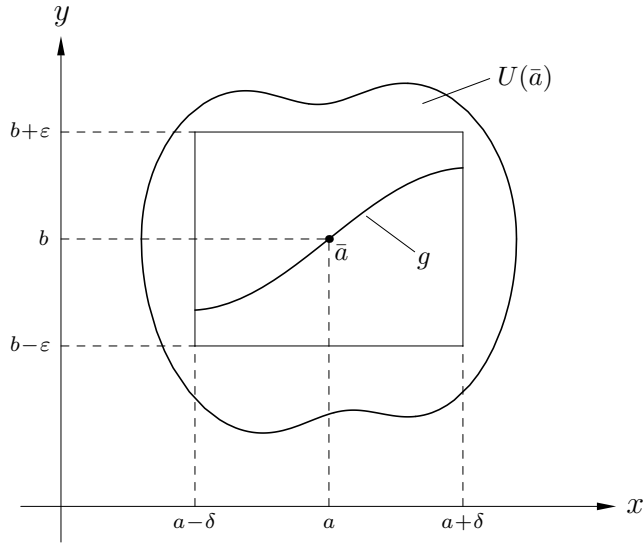


Abb. 8.13 zeigt die durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ in dem Intervall $(a - \delta, a + \delta)$ implizit definierte Funktion g . Die entsprechende Kurve ist der Durchschnitt der dreidimensionalen Punktmenge $\{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$ mit der Ebene $z = 0$. Hierfür denke man sich die z -Achse senkrecht auf der (x, y) -Ebene stehend.

Beispiel. Sei $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

8/4/2

$f(x, y) = 0$ ($\iff x^2 + y^2 = 1$) definiert in \mathbb{R}^2 eine Kreislinie mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(0, 0)$.

Sei $\bar{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $f(\bar{a}) = 0$, dann ist \bar{a} ein Punkt der Kreislinie. Für $a \neq \pm 1$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in U_\delta(a)$ genau ein $y \in U_\varepsilon(b)$ existiert mit $f(x, y) = 0$. In diesem Fall ist $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

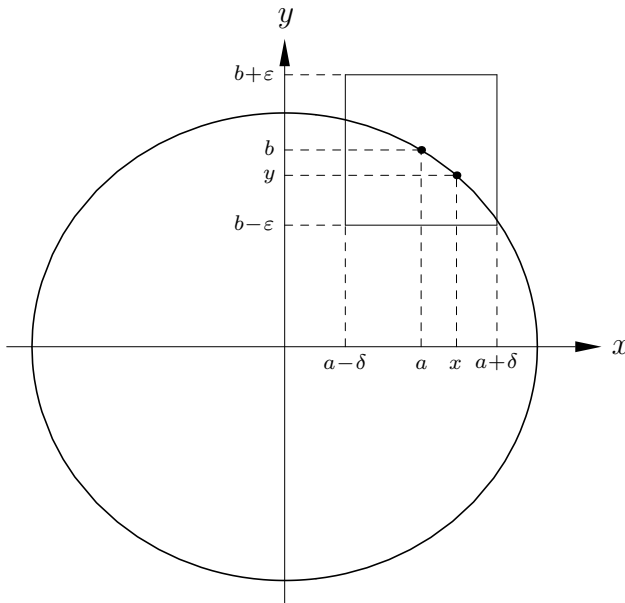


Abb. 8.14 Hier wird die analoge Situation wie in der Abb. 8.13 dargestellt, jedoch für den Spezialfall $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Satz 8.15 (*Hauptsatz über implizite Funktionen mit zwei Veränderlichen*)

8/4/3

Voraussetzung:

- (1) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in M .
- (2) Sei $\bar{c} = (a, b) \in M$ und $f(\bar{c}) = 0$.
- (3) f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ stetig partiell nach y differenzierbar und $f_y(\bar{c}) \neq 0$.

Behauptung:

Es gibt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in U_\delta(a)$ genau ein $y \in U_\varepsilon(b)$ existiert mit $f(x, y) = 0$ und $y = g(x)$ (insbesondere ist $b = g(a)$).

Beweis. Da $f_y(\bar{c}) \neq 0$ und f_y in $U(\bar{c})$ stetig ist, gibt es eine Umgebung $U'(\bar{c})$, so daß f_y dort stets positiv oder stets negativ ist. Sei o.B.d.A. $f_y(\bar{c}) > 0$ ($f_y(\bar{c}) < 0$ analog). 8/4/4

Wir wählen jetzt $d > 0$, jedoch so klein, daß $U_d(a) \times U_d(b) \subseteq U'(\bar{c})$.

Da $f_y(a, y) > 0$ für alle $y \in U_d(b)$, ist f_y in $U_d(b)$ streng monoton wachsend. Sei $0 < \varepsilon < d$ und $y_1 := b - \varepsilon$, $y_2 := b + \varepsilon$. Wegen $f(a, b) = 0$ ist $f(a, y_1) < 0 < f(a, y_2)$. Da $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$ als Funktionen von x stetig sind, gibt es ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so daß für jedes $x \in U_\delta(a)$ gilt: $f(x, y_1) < 0 < f(x, y_2)$.

Für $x_0 \in U_\delta(a)$ ist also $f(x_0, y)$ in $[y_1, y_2]$ stetig und

$$f(x_0, y_1) < 0 < f(x_0, y_2).$$

Nach dem Zwischenwertsatz (für Funktionen einer Veränderlichen) gibt es ein $y_0 \in [y_1, y_2]$, so daß $f(x_0, y_0) = 0$.

Da f_y in $U'(\bar{c})$ stets positiv ist, erhält man insbesondere $f_y(x_0, y) > 0$. Folglich ist $f(x_0, y)$ streng monoton wachsend und somit y_0 das einzige Element in $U'_\varepsilon(b)$ mit $f(x_0, y_0) = 0$. Durch $g(x_0) := y_0$ für $x_0 \in U_\delta(a)$ ist eine Funktion g definiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß g in $U_\delta(a)$ stetig ist.

Sei $x_0 \in U_\delta(a)$, $\varepsilon > 0$ (wie oben) und $\delta' > 0$, jedoch so klein, daß $U_{\delta'}(x_0) \subseteq U_\delta(a)$ und $|x - x_0| < \delta'$. Nach den vorhergehenden Betrachtungen existiert für $x \in U_{\delta'}(a)$ genau ein $y \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$, so daß $f(x, y) = 0$, also $g(x) = y$.

Damit erhält man

$$|g(x) - g(x_0)| = |y - y_0| \leq \underbrace{|y - b|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|b - y_0|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von g in x_0 . □

Korollar. Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 8.15 noch

8/4/5

(4) f ist in $U(\bar{c})$ stetig partiell nach x differenzierbar, dann ist die durch $f(x, y) = 0$ in $U_\delta(a)$ implizit definierte Funktion g differenzierbar, und es gilt: $g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$.

Beweis. Wir wählen die Bezeichnungen wie im vorhergehenden Beweis.

8/4/6

Sei $|x - x_0| < \delta'$, $x \neq a$ und $y = g(x)$, dann ist $(x, y) \in U_{\delta'}(x_0) \times U_\varepsilon(b) := D$, und die Verbindungsstrecke zwischen (a, b) und (x, y) gehört ganz zu D . Nach dem Mittelwertsatz für Funktionen mit mehreren Veränderlichen gilt (er kann hier angewendet werden, da $f(x, y)$ nach Voraussetzung differenzierbar ist):

$$\underbrace{f(x, y) - f(a, b)}_{=0} = 0 = (x - a) \cdot f_x(\bar{u}) + (y - b) \cdot f_y(\bar{u}),$$

wobei $\bar{u} = \bar{a} + \vartheta(\bar{x} - \bar{c})$, $y = g(x)$ und $b = g(a)$. Hieraus folgt

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = -\frac{f_x(\bar{u})}{f_y(\bar{u})}.$$

Da g in $U_\delta(a)$ stetig ist, gilt für $x \rightarrow a$ auch $y = g(x) \rightarrow g(a) = b$ und somit $\bar{u} \rightarrow \bar{a}$. Folglich existiert

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{=g'(a)} = -\frac{f_x(\bar{c})}{f_y(\bar{c})},$$

also

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}. \quad \square$$

Beispiel. Es sei $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy - 1$.

8/4/7

Für f gelten die folgenden Voraussetzungen:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ mit $\bar{c} = (1, 0)$ stetig.
2. $f(1, 0) = 0$.
3. f ist in $U(\bar{c})$ stetig partiell nach y differenzierbar und $f_y(1, 0) = -2 \neq 0$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(1)$ genau ein $y \in U_\varepsilon(0)$ existiert mit $f(x, y) = 0$ und $g(x) = y$.

Offenbar ist auch f stetig partiell nach x differenzierbar. Damit ist (nach dem letzten Korollar) g in $U_\delta(1)$ differenzierbar und

$$y' = g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = \frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}.$$

Hierbei entsteht eine Gleichung, die eine unbekannte Funktion y und deren Ableitung y' enthält. (Gleichungen dieser Art heißen *Differentialgleichungen*.)

Abschließend soll noch der Hauptsatz über implizite Funktionen mit mehreren Veränder-

8/4/8

lichen ohne Beweis angegeben werden. (Siehe hierzu Literaturangabe [4], Teil II, Seite 235 – 242.)
Dazu benötigen wir noch die folgende Definition.

Definition. (*implizit definierte Funktionen mit mehreren Veränderlichen*)

8/4/9

Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $\bar{c} = (\bar{a}, \bar{b})$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c}) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ definiert und $f(\bar{c}) = \bar{0}$.

Weiterhin seien $\varepsilon, \delta > 0$, jedoch so klein, daß $U_\delta(\bar{a}) \times U_\varepsilon(\bar{b}) \subseteq U(\bar{c})$.

Durch die Gleichung $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$ ist in der Umgebung $U_\delta(\bar{a})$ eine Funktion

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ implizit definiert

$\overline{\text{Def}}$ Für jedes $\bar{x} \in U_\delta(\bar{a})$ gibt es genau ein $\bar{y} \in U_\varepsilon(\bar{b})$, so daß $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$ und $\bar{y} = g(\bar{x})$ (insbesondere ist $\bar{b} = g(\bar{a})$).

Satz 8.16 (*Hauptsatz über implizite Funktionen*)

8/4/10

Voraussetzung:

- (1) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ eine offene Menge und $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig in M .
- (2) Sei $\bar{c} = (\bar{a}, \bar{b})$ und $f(\bar{c}) = \bar{0}$.
- (3) f_1, \dots, f_m seien in einer Umgebung $U(\bar{c})$ nach allen Variablen y_1, \dots, y_m stetig partiell differenzierbar und die Determinante der Funktionalmatrix $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(\bar{c})$ sei (an der Stelle \bar{c}) nicht null.

Behauptung:

Es gibt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, für die gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\bar{x} \in U_\delta(\bar{a})$ genau ein $\bar{y} \in U_\varepsilon(\bar{b})$ existiert mit $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$ und $\bar{y} = g(\bar{x})$ (insbesondere ist $g(\bar{a}) = \bar{b}$).

Beweis. Siehe Literaturangabe [4], Teil II, Seite 235. \square

8/4/11