

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.1 Das unbestimmte Integral

Definition. (*Stammfunktion*)

9/1/1

Es seien f, F in einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ definiert.

F ist eine *Stammfunktion* von f in M

$\stackrel{\text{Df}}{=} F$ ist in M differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in M$.

Satz 9.1 Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f in einem Intervall I , dann unterscheiden sich F_1 und F_2 höchstens um eine additive Konstante. 9/1/2

(D.h., es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $F_1(x) = F_2(x) + c$ für jedes $x \in I$).

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Bemerkung. Es soll noch einmal hervorgehoben werden, daß eine in I stetige Funktion dort eine Stammfunktion besitzt, und $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ist die Stammfunktion von f in I , die an der Stelle $x = a$ null wird (vgl. Abb. 9.12) 9/5/13

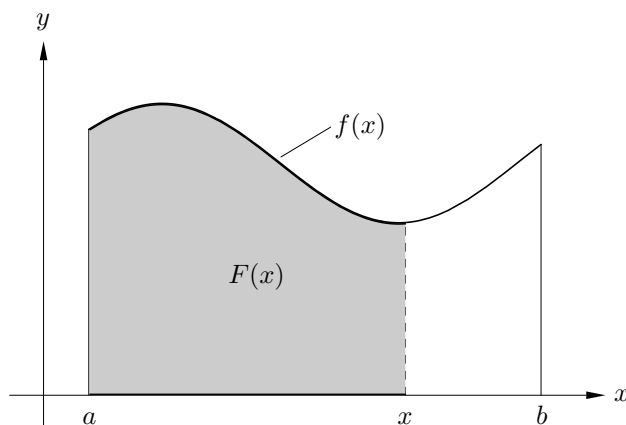


Abb. 9.12 Jedem $x \in I = [a, b]$ wird durch $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ein Wert zugeordnet, der durch den Flächeninhalt der schattierten Fläche dargestellt ist. Hierdurch wird auch der Zusammenhang zwischen f und F sichtbar.

Jetzt sind wir in der Lage, den folgenden wichtigen Satz zu formulieren, mit dessen Hilfe man bestimmte Integrale berechnen kann, wenn man eine Stammfunktion der zu integrierenden Funktion schon kennt.

Satz 9.19 (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

9/5/14

Ist f in $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f in $[a, b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f und $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$. Dann 9/5/15

ist $F_0(a) = 0$ und $\int_a^b f(t) dx = F_0(b) = F_0(b) - F_0(a)$.

Da F und F_0 Stammfunktionen der gleichen Funktion f in einem Intervall sind, unterscheiden sie sich nur um eine additive Konstante, also $F_0(x) = F(x) + c$. Dann gilt

$$F_0(b) - F_0(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a).$$

Damit gilt die Behauptung. \square

$$\mathbf{Bez.:} \quad F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b := F(x) \Big|_a^b.$$