

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

**Definition.** (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  und  $f$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  definiert.  $f$  ist in  $\bar{c}$  *partiell nach  $x_i$  differenzierbar* ( $i = 1, \dots, n$ )

$\equiv_{\text{Df}}$  Die Funktion  $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$  ist (als Funktion der einen Veränderlichen  $x_i$ ) an der Stelle  $c_i$  differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $\bar{c}$  (oder kurz: in  $\bar{c}$ ).

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$$

#### 8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Für  $i = j$  schreibt man  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right) := \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}(\bar{x})$ .

8/2/1

Ist  $i \neq j$ , dann nennt man die 2. partiellen Ableitungen auch *gemischte partielle Ableitungen*.

Nach dem gleichen Muster definiert man induktiv die *n-ten partiellen Ableitungen*. Hierfür benutzt man die Bezeichnung

$$\frac{\partial^n f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(\bar{x}), \quad \text{wobei } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}.$$

#### Übungsaufgaben

9. Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

8/5/9

Bilden Sie (falls existent) alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von  $f$ .

Was läßt sich über die gemischten Ableitungen aussagen?

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Inhalt des Satzes von Schwarz.