

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Definition.** (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) differenzierbar

$\overline{\text{Def}}$   $f$  ist in einer Umgebung  $U(a)$  definiert, und es existiert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von  $f$  in  $a$ .

**Bez.**  $f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$

**Definition.** (*Tangente*)

7/1/7

Es sei  $f$  in  $a$  differenzierbar.

Die durch die Gleichung  $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$  bestimmte Gerade heißt *Tangente* von  $f$  an der Stelle  $a$  (oder im Punkt  $(a, f(a))$ ), und die entsprechende Gleichung heißt auch *Gleichung der Tangente*. (vgl. Abb. 7.1)

**Beispiele.**

3.  $f(x) = x^2.$

7/1/8/3

Behauptung:  $f'(x) = 2x$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $x \neq a$ . Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \xrightarrow{x \rightarrow a} 2a.$$

Folglich ist

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a.$$

Die Gleichung der Tangente berechnet sich wie folgt:

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2.$$

Speziell für  $a = 1$  ergibt sich dann

$$y = t(x) = 2x - 1 \quad (\text{vgl. Abb. 7.3})$$

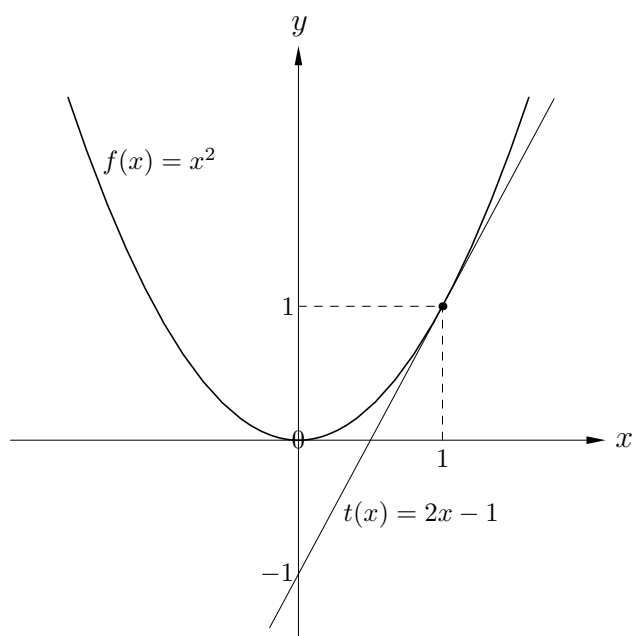


Abb. 7.3 Die Tangente an der Funktion  $f(x) = x^2$  im Punkt  $(1,1)$  hat den Anstieg 2; sie schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $(0, -1)$ .