

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

5.3 Elementare Funktionen

Definition. (\cos , \sin)

5/3/45

$$\cos x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x \stackrel{\text{Df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Beide Reihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut. Folglich sind \sin und \cos in \mathbb{R} definiert. 5/3/46

An dieser Stelle ist nicht einzusehen, daß die so eingeführten Funktionen \sin und \cos dieselben sein sollen, die man anschaulich am Einheitskreis gewinnt. Erst mit Hilfe der Differentialrechnung werden wir später nachweisen können, daß es sich tatsächlich um die gleichen Funktionen handelt.

Satz 5.16 \sin und \cos haben folgende Eigenschaften:

5/3/47

- (1) \sin und \cos sind in \mathbb{R} definiert, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.
- (2) \sin ist ungerade und \cos ist gerade.
- (3) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ ($\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$).
- (4) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ ($\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).
- (5) $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$.
- (6) $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$.
- (7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$).
- (8) \sin und \cos sind stetig.