

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.3 (Folgenstetigkeit)

5/2/14

Es sei $a \in D(f)$. Dann gilt:

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Beweis. (\longrightarrow) Sei f in a stetig. Nach Definition erhält man:

5/2/15

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow a$. Dann ist $|x_n - a| < \delta$ für fast alle n , und somit gilt auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für fast alle n .

Also $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

(\longleftarrow) Annahme, f ist in a nicht stetig.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D(f)$ existiert mit $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Wählt man $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, dann gibt es für jedes n ein $x_n \in D(f)$ mit

$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, also

$x_n \rightarrow a$ aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$,

d.h., $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ $\nexists!$ \square

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 6.10 (Folgenstetigkeit)

6/2/13

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in D(f)$.

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_i) in \mathbb{M}_1 mit $x_i \in D(f)$ gilt:

Wenn $x_i \rightarrow a_i$, so $f(x_i) \rightarrow f(a)$.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog wie für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. \square

6/2/14