

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.3 Integrierbarkeitskriterien

**Satz 9.8** (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium)

9/3/1

Sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:  $f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $\mathfrak{z}$  von  $I$  existiert, so daß  $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ .

**Satz 9.9** Es sei  $f$  in  $I = [a, b]$  definiert und beschränkt. Dann gilt:

9/3/6

$f$  ist in  $I$  integrierbar gdw für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge  $(\mathfrak{z}_\nu)$  und jede Folge  $(\tau_\nu)$  von zugehörigen Zwischenstellensystemen  $\tau_\nu$  gilt:

Es existiert  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_f(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$  (und der Limes ist gleich dem Integral  $\int_a^b f(x) dx$ .)

#### 9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

**Satz 9.10** Ist  $f$  in  $I$  stetig, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar.

9/4/0

**Satz 9.11** Ist  $f$  in  $I$  definiert und beschränkt und besitzt  $f$  in  $I$  höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, dann ist  $f$  in  $I$  integrierbar.

9/4/2

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

**Bemerkung.** Völlig analog wie im eindimensionalen Fall gelten auch hier

10/1/10

(1) die Sätze über Zwischensummen

(ein Zwischenstellensystem  $\bar{\tau}$  bei einer Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$  ist gegeben durch  $\bar{\tau} = \{\bar{\xi}_{ij} \in D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ , wobei  $\bar{\xi}_{ij}$  beliebig in  $D_{ij}$  zu wählen ist und die entsprechende Zwischensumme durch  $S_f(\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\tau})$  definiert ist),

(2) das Riemannsches Integrierbarkeitskriterium,

(3) stetige Funktionen sind integrierbar,

(4) beschränkte Funktionen mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen sind integrierbar.

Die Beweise verlaufen ähnlich wie für Funktionen mit einer Veränderlichen.

Weiterhin gilt: