

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) differenzierbar

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

$$\text{Bez. } f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

Definition. (*Tangente*)

7/1/7

Es sei f in a differenzierbar.

Die durch die Gleichung $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ bestimmte Gerade heißt *Tangente* von f an der Stelle a (oder im Punkt $(a, f(a))$), und die entsprechende Gleichung heißt auch *Gleichung der Tangente*. (vgl. Abb. 7.1)

Definition. (*eine weitere Definition der Differenzierbarkeit*)

7/1/10

f ist in a differenzierbar

$\stackrel{\text{Df}}{=} f$ ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es gibt eine reelle Zahl b und eine Funktion $o(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{o(x)}{|x - a|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, so daß für jedes $x \in U(a)$ gilt: $f(x) = f(a) + b(x - a) + o(x)$.

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

In Kapitel 7 wurden zwei äquivalente Definitionen für die Differenzierbarkeit von Funktionen mit einer Veränderlichen angegeben. Wir werden jetzt die zweite der Definitionen, die die lineare Approximation benutzt, für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit mehreren Veränderlichen verallgemeinern. Hierzu machen wir zunächst einen kleinen Exkurs in die lineare Algebra.

8/1/0

Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ Vektorräume mit kanonischer Basis) kann als Matrix aufgefaßt werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sind dann sog. Spaltenvektoren:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

und es ist

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Ist $m = 1$, dann besteht die Matrix A nur aus einer Zeile, die dann als Vektor in \mathbb{R}^n aufgefaßt werden kann. Hierfür wählen wir die Bezeichnung $A := (a_1, \dots, a_n)$.

In diesem Fall schreibt man (der Einfachheit wegen aus drucktechnischen Gründen) die Vektoren $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ als Zeilen: $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist

$$A\bar{x} = (a_1, \dots, a_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

Ist zusätzlich $n = 1$, also $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann besteht die Matrix (bzw. der Vektor) A nur aus einer Komponente: $A = (a_1)$. Wendet man A auf einen „Vektor“ $\bar{x} = (x_1)$ aus \mathbb{R} an, so erhält man $A\bar{x} = a_1 x_1$.

Für A bzw. \bar{x} schreiben wir dann einfach a_1 bzw. x_1 .

Diese Bezeichnungsweise ausnützend liefert die zweite Definition der Differenzierbarkeit aus Kapitel 7, 7/1/10 folgende Formulierung:

f ist in $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar \iff

f ist in einer Umgebung $U(c)$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung

$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Funktion $o(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{o(x)}{|x - c|} \xrightarrow{x \rightarrow c} 0$, so daß für jedes

$x \in U(c)$ gilt: $f(x) = f(c) + b \cdot (x - c) + o(x)$.

Diese Formulierung läßt sich sofort auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und Elemente $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ erweitern.