

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in M gleichmäßig gegen f

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in M$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Definition. (*Funktionenreihe*)

5/4/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind, und es sei

$F_n := \sum_{i=0}^n f_i$ (die F_n sind also ebenfalls in M definierte Funktionen).

(1) Die Folge (F_n) heißt *Funktionenreihe*.

Bez.: $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ oder einfach $\sum f_i$ bzw. $\sum f_i(x)$

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen f

$\overline{\text{Df}}$ (F_n) ist in M konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen f .

(3) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M absolut konvergent gegen f

$\overline{\text{Df}}$ $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ ist in M konvergent gegen f .

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.9 Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 9.24 (*Integrierbarkeit der Grenzfunktion*)

9/9/1

Sei $a < b$, $I = [a, b]$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall I definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert (f_n) in I gleichmäßig gegen die Funktion f und sind alle f_n in I integrierbar, dann ist f in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Limes mit dem Integral)

- (2) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig gegen die Funktion f und sind alle f_n in I integrierbar, dann ist f in I integrierbar, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

(Vertauschbarkeit des Integrals mit der unendlichen Summe)