

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Definition. (*konvex*)

7/3/12

Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar.

(1) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von unten*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

(2) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von oben*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

Definition. (*lokales Extremum*)

7/3/19

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ definiert und $c \in I$.

f besitzt an der Stelle c (oder kurz in c) ein *lokales* oder *relatives Extremum*
(:= *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum*)

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(c)$, so daß für jedes $x \in U(c)$ mit $x \neq c$ gilt:

$f(c) > f(x)$ für ein lokales Maximum und
 $f(c) < f(x)$ für ein lokales Minimum.

Definition. (*Wendepunkt*)

7/3/30

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ stetig und $c \in I$.

f besitzt in c einen *Wendepunkt*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in (a, c) und in (c, b) differenzierbar und es gilt

(f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von unten und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von oben) oder
(f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von oben und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von unten).

Definition. (*Unendlichkeitsstelle*)

7/3/41

Sei $a < b$ und $a \leq c \leq b$ und f in $(a, b) \setminus \{c\}$ definiert.

(1) Ist $c = a$ bzw. $c = b$, dann besitzt f in c eine *rechtsseitige* (bzw. *linksseitige*) *Unendlichkeitsstelle*

$\overline{\text{Df}}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > 0}} f(x) = \pm\infty$ (bzw. $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < 0}} f(x) = \pm\infty$).

(2) Ist $a < c < b$, dann besitzt f in c eine *Unendlichkeitsstelle* oder *Polstelle*

$\overline{\text{Df}}$ f besitzt in c eine rechtsseitige und eine linksseitige Unendlichkeitsstelle.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 7

- Definitionen: Monotonie, Konvexität, lokale Extrema, Wendepunkte, Unendlichkeitsstellen;

7/6/8