

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.7 Uneigentliche Integrale

Beispiele.

(1). Es sei $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

9/7/3/1

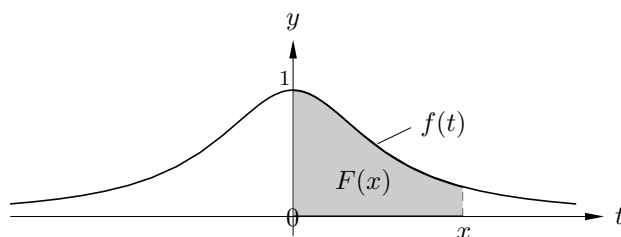


Abb. 9.17 a Der Flächeninhalt der schattierten Fläche ist durch das bestimmte Integral $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ gegeben.

Für $x \rightarrow \infty$ entsteht das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t) dt$.

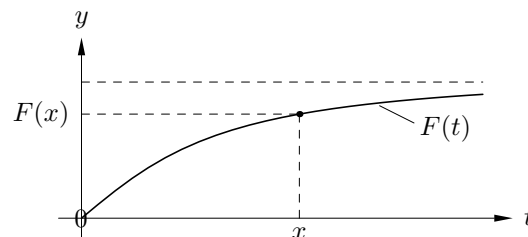


Abb. 9.17 b Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist $F(x) = \arctan x$ eine Stammfunktion von f , folglich gibt $F(x)$ den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^x f(t) dt$ (Inhalt der schattierten Fläche aus Abb. 9.17 a) an.

Gesucht ist das uneigentliche Integral von f in $(-\infty, \infty)$.

Es ist $\int_{-\infty}^\infty f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^\infty f(t) dt$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^x \\ &= \arctan x - \underbrace{\arctan 0}_{=0} = \arctan x. \end{aligned}$$

Damit gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. Also

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Analog ist

$$G(x) = \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} dt = \arctan 0 - \arctan x = -\arctan x$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\arctan x) = -(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und somit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Bemerkung. $\arctan x$ könnte auch durch $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ definiert werden.

Interpretiert man das uneigentliche Integral als Fläche, dann schließt die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+t^2}$ mit der x -Achse in dem unendlichen Intervall $(-\infty, \infty)$ eine „endliche“ Fläche ein.

(2). Wir betrachten jetzt die Funktion $f(t) = \frac{1}{t}$ und zeigen, daß das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t}$ nicht konvergiert. Dies bedeutet anschaulich gesprochen, daß die „Fläche“, die von oben durch die Funktion und von unten durch die x -Achse in dem Intervall $[1, \infty)$ begrenzt wird, unendlich groß ist (vgl. Abb. 9.18). 9/7/3/2

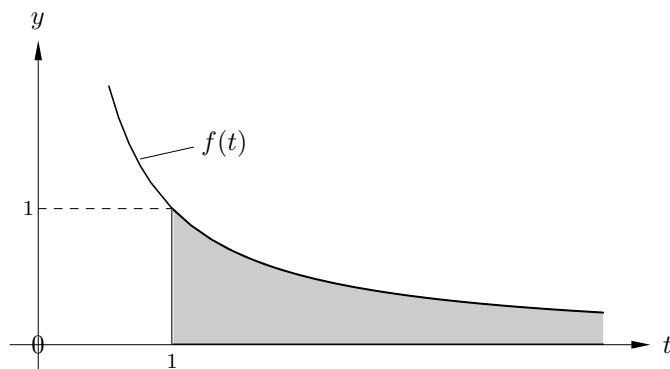


Abb. 9.18 Das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t}$ konvergiert nicht, denn $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \infty$.

Es ist

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty;$$

d.h. der Limes existiert nicht.