

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*Lipschitz-Stetigkeit*)

6/3/36

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

f ist in M *Lipschitz-stetig*

$\overline{\text{Def}}$ $M \subseteq D(f)$ und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq c \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$.

Bemerkung. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f in M erhält man für $x, y \in M$ und $x \neq y$:

6/3/42

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq c,$$

d.h., der sog. *Differenzenquotient*, der uns noch in der Differentialrechnung begegnen wird, ist in M durch c beschränkt.

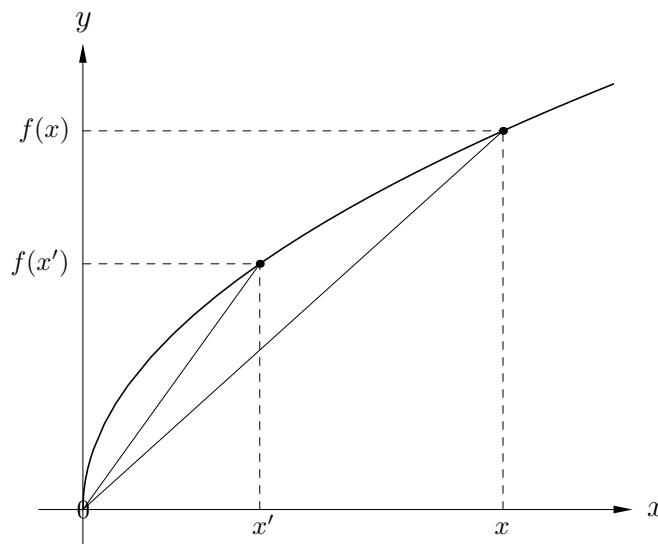


Abb. 6.15 Der Anstieg der Sekante zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(x, f(x))$ mit $x > 0$ ist gegeben durch $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Für $f(x) = \sqrt{x}$ erhält man daraus $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wenn $x \rightarrow 0$ und $x > 0$, so ist $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \frac{1}{|\sqrt{x}|} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ offenbar nicht beschränkt.

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzenquotient*)

7/1/1

Sei f in einer Umgebung $U(a)$ definiert.

Die Funktion $\varphi(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ mit $x \in U(a)$ und $x \neq a$ heißt *Differenzenquotient* von f in a .

Bez. Für $y = f(x)$ und $b = f(a)$ sei
 $\Delta y := f(x) - f(a) = y - b$ und $\Delta x := x - a := h$.