

## Kapitel 9

### Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 9.8 Länge von Kurven

**Satz 9.23** *Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\mathfrak{k} = \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar, und es gilt*

9/8/10

$$l(\mathfrak{k}) = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k (f'_i(t))^2} dt.$$

#### Beispiele.

(1). Verbindungsstrecke zweier Punkte in der Ebene.

9/8/15/1

Es sei  $\bar{a} = (1, 1)$  und  $\bar{b} = (3, 2)$ . Wählt man als Parameterintervall  $[0, 1]$ , dann ist durch  $f(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) = (1 + 2t, 1 + t) := (f_1(t), f_2(t))$  eine Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke  $\mathfrak{k}$  gegeben. Offenbar sind  $f_1, f_2$  in  $[0, 1]$  stetig differenzierbar und  $f'_1(t) = 2, f'_2(t) = 1$  und damit  $f'(t) = (2, 1)$  für jedes  $t \in [0, 1]$ . Folglich ist  $\mathfrak{k}$  rektifizierbar und

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^1 |f'(t)| dt = \int_0^1 |(2, 1)| dt = \int_0^1 \sqrt{2^2 + 1^2} dt = \sqrt{5}.$$

Natürlich hätte man das Ergebnis in diesem einfachen Fall auch ohne Integrale erhalten.