

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

(1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Korollar. Ist I ein Intervall in \mathbb{R} , f in I differenzierbar, und ist $f'(x) = 0$ für jedes $x \in I$, dann ist f in I konstant. 7/2/4

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.13 Es sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:

7/3/9

- (1) f ist in I *monoton wachsend* gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.
- (2) f ist in I *streng monoton wachsend* gdw $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

Definition. (*konvex*)

7/3/12

Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar.

(1) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) von unten

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

(2) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) von oben

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

Satz 7.14 Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:
 f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von unten gdw f' in I monoton
 (bzw. streng monoton) wächst.

7/3/14

(Der Satz gilt analog für „von oben“ und „monoton fallend“.)

Korollar. Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar.

7/3/16

- (1) f ist in I konvex von unten gdw $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.
- (2) f ist in I streng konvex von unten gdw $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so daß $f''(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.
- (3) Die Behauptungen gelten analog für konvex bzw. streng konvex von oben.

Beweis. Mit Hilfe der Sätze 7.13 und 7.14 erhält man sofort

7/3/17

(1). f ist in I konvex von unten gdw
 f' in I monoton wächst gdw
 $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$.

(2). f ist in I streng konvex von unten gdw
 f' in I streng monoton wächst gdw
 $f''(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, und es gibt kein Teilintervall $(a', b') \subseteq I$ mit $a' < b'$, so
 daß $f''(x) = 0$ für alle $x \in (a', b')$.

(3) zeigt man analog. \square