

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.3 Komplexe Zahlen

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{Def}}{=} (a + c, b + d) \quad (\text{Addition von Elementen aus } \mathbb{R}^2),$$

4/3/1

$$c \cdot (a, b) \stackrel{\text{Def}}{=} (ca, cb) \quad (\text{Multiplikation mit reellen Zahlen}).$$

Zur geometrischen Veranschaulichung der komplexen Zahlen betrachten wir in  $\mathbb{R}^2$  die kanonische Basis  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  und erhalten so ein rechtwinkliges Koordinatensystem für  $\mathbb{R}^2$ , mit dessen Hilfe sich die Elemente aus  $\mathbb{R}^2$  als Punkte in der Ebene darstellen lassen (*Gaußsche Zahlenebene*).

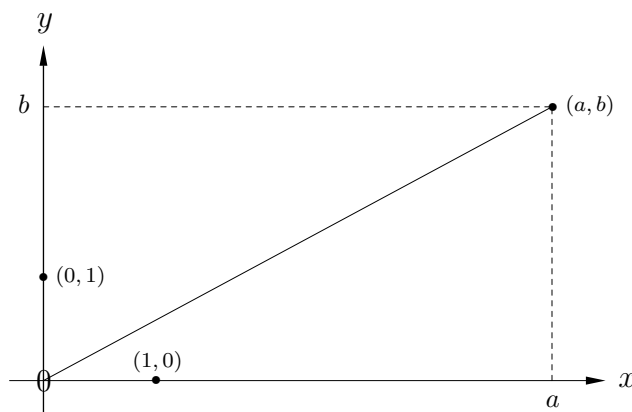


Abb. 4.1 Gaußsche Zahlenebene zur Darstellung der komplexen Zahlen

Jedes  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  läßt sich eindeutig als Linearkombination der Basis darstellen. Die folgenden Teilmengen  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  und  $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$  bilden wichtige eindimensionale Teilräume, die mit den entsprechenden Koordinatenachsen identifiziert werden können.

Wir führen jetzt eine Multiplikation von Paaren in  $\mathbb{R}^2$  ein.

4/3/2

Es sei  $(a, b) \cdot (c, d) \stackrel{\text{Def}}{=} (ac - bd, ad + bc)$ .

Damit erhält man das folgende Resultat.

**Satz 4.16** *Mit den definierten Operationen (Addition und Multiplikation von Paaren) bildet  $\mathbb{R}^2$  einen Körper  $\mathbb{C}$  (den Körper der komplexen Zahlen).*

4/3/3

**Bemerkung.** Man kann mit komplexen Zahlen im Prinzip rechnen wie mit reellen Zahlen, allerdings ist in  $\mathbb{C}$  keine Ordnung definiert.

4/3/5

Wir haben uns schon überlegt, daß  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  eine Basis für den Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  bildet. Der Teilraum  $\{x \cdot (1, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  von  $\mathbb{R}^2$  ist offenbar isomorph mit  $\mathbb{R}$

(als 1-dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ). Daher identifizieren wir in Zukunft  $(1, 0)$  mit  $1$ . Für  $(0, 1)$  schreibt man auch  $i$  (nicht zu verwechseln mit natürlichen Zahlen  $i$ ), so daß durch  $\{1, i\}$  eine Basis für  $\mathbb{R}^2$  gegeben ist.

Mit dieser Vereinbarung gilt

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Für  $a \cdot 1$  bzw. für  $b \cdot i$  schreiben wir kurz  $a$  bzw.  $ib$ . Damit erhält man eine geeignete Darstellung für komplexe Zahlen:

$$(a, b) = a + ib, \quad (0, 0) = 0 + i0 := 0.$$

**Bez.:** In  $z = x + iy$  heißt  $x$  *Realteil* ( $:= \operatorname{Re}(z)$ ) und  $y$  *Imaginärteil* ( $:= \operatorname{Im}(z)$ ) von  $z$ .

**Definition.** (*Betrag für komplexe Zahlen*)

4/3/7

Es sei  $z = x + iy$ .

$$|z| \stackrel{\text{Df}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Bez.:**  $|z|$  heißt *Betrag* von  $z$  und  
 $|z_1 - z_2|$  heißt *Abstand* zwischen  $z_1$  und  $z_2$ .

## Übungsaufgaben

14. Berechnen Sie für die komplexen Zahlen  $z_1 = 3 + 4i$ ,  $z_2 = 1 - i$ :

4/6/14

- |                       |                         |                    |
|-----------------------|-------------------------|--------------------|
| (a) $z_1 \cdot z_2$ , | (b) $\frac{z_1}{z_2}$ , | (c) $ z_1 $ ,      |
| (d) $z_2^3$ ,         | (e) $\sqrt{z_2}$ ,      | (f) $\sqrt{z_1}$ . |