

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

Zunächst betrachten wir ein geeignetes *Axiomensystem der reellen Zahlen*, das in vier Gruppen unterteilt ist. Dazu sei \mathbb{R} eine Menge (Menge der reellen Zahlen). In \mathbb{R} sind zwei 2-stellige *Operationen* $+$ und \cdot und eine 2-stellige Relation \leq definiert, so daß gilt:

I. \mathbb{R} ist ein Körper (d.h., in \mathbb{R} gelten folgende 10 Eigenschaften:) 2/1/1

- (1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (2) $x + y = y + x$,
- (3) Es existiert ein Element 0 in \mathbb{R} , so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x + 0 = x$.

Bemerkung. Aus (2) und (3) folgt sofort, daß es genau ein solches Element 0 in \mathbb{R} gibt. Denn sind $0_1, 0_2$ Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

- (4) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so daß $x + y = 0$.

Bemerkung. Aus (1) – (4) folgt, daß es für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $x + y = 0$. Wir zeigen, daß y durch x tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Dazu sei x gegeben.

Angenommen, es gibt Elemente y, z , so daß $x + y = 0$ und $x + z = 0$. Dann gilt:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z.$$

Dieses durch x eindeutig bestimmte y wird mit $y := -x$ bezeichnet.

Die Eigenschaften (1) – (4) sind die Axiome für eine (*additive*) *abelsche Gruppe*.

- (5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- (6) $x \cdot y = y \cdot x$,
- (7) Es existiert ein Element 1 in \mathbb{R} , so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \cdot 1 = x$.

Bemerkung. Analog wie bei (3) gibt es genau ein solches Element 1 . Denn wären $1_1, 1_2$ Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

- (8) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 1$.

Bemerkung. Analog wie zu (4) zeigt man, daß y durch x eindeutig bestimmt ist; der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Dieses durch x eindeutig bestimmte y wird mit $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$ bezeichnet.

- (9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Bemerkung. Aus den obigen Axiomen erhält man: $x \cdot 0 = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Es ist $x = x \cdot 1 = x \cdot (\underbrace{1 + 0}_x) = x + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$. Nach den Axiomen (2) und (3) gibt es genau ein Element 0 , so daß $x = x + 0$. Da auch $x = x + x \cdot 0$ ist, muß dann $x \cdot 0$ dieses Element 0 sein.

(10) $0 \neq 1$.

II. \mathbb{R} ist ein geordneter Körper

2/1/2

(d.h., in \mathbb{R} gelten zusätzlich die folgenden 5 Eigenschaften:)

- (1) Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, so $x \leq z$. (Transitivität)
- (2) Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$, so $x = y$. (Antisymmetrie)
- (3) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. (Linearität)
- (4) Wenn $x \leq y$, so $x + z \leq y + z$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so $0 \leq x \cdot y$.

Bemerkung. Aus (3) folgt sofort die *Reflexivität*, d.h. für jedes x gilt: $x \leq x$.

Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome der reflexiven Ordnung*.

(4) könnte auch abgeschwächt werden zu

(4') Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so $0 \leq x + y$.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß $x \leq y \iff 0 \leq y - x$.

Wie üblich ist $y \geq x$ eine andere Schreibweise für $x \leq y$.

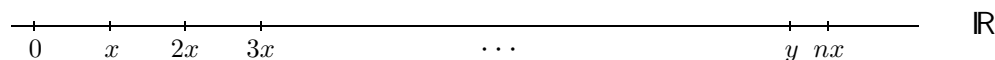
III. \mathbb{R} ist ein archimedisch geordneter Körper

2/1/3

(d.h., in \mathbb{R} gilt zusätzlich das *archimedische Axiom*)

Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x, y$ gibt es eine natürliche Zahl n , so daß $y < n \cdot x$,
(wobei $x < y \stackrel{\text{Df}}{\iff} x \leq y$ und $x \neq y$).

Dies bedeutet, daß durch endlich-oft-maliges Addieren einer positiven reellen Zahl zu sich selbst schließlich jede reelle Zahl übertroffen werden kann.



Bevor das letzte Axiom für die reellen Zahlen formuliert werden kann, benötigen wir noch einige Definitionen und Bezeichnungen.

IV. \mathbb{R} genügt dem Intervallschachtelungsaxiom:

2/1/6

Es sei $([a_n, b_n])_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in \mathbb{R} , so daß für jede natürliche Zahl n gilt: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$, für jede natürliche Zahl n .

Anschauliche Deutung des Axioms: Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen“; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*
 $\overline{\text{Df}}$ (a_n) konvergiert gegen 0.

Satz 3.10 (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent und

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent
und $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$
- (5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|.$
- (6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$
bzw. $d \leq \lim b_n$.

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Es sei M eine Menge und \sim eine zweistellige Relation in M .

3/2/5

\sim heißt *Äquivalenzrelation* in M

$\overline{\text{Df}}$ Für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- (1) $a \sim a$, (Reflexivität)
- (2) wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so $a \sim c$, (Transitivität)
- (3) wenn $a \sim b$, so $b \sim a$. (Symmetrie)

Jede Cauchyfolge (b_n) mit $(b_n) \in a = \langle a_n \rangle$ ist ein *Repräsentant* der Klasse a . Die 3/2/8

Menge der betrachteten Äquivalenzklassen heißt *Menge der reellen Zahlen* und wird mit \mathbb{R} bezeichnet.

Beispielsweise ist $e = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (b_n) \text{ ist mit } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ grenzwertgleich}\}$.

Damit \mathbb{R} ein geordneter Körper wird, benötigen wir noch Rechenoperationen $+$ und \cdot und eine Ordnungsrelation $<$ in \mathbb{R} . Die Definitionen der Operationen und der Relation erfolgen mit Hilfe von Repräsentanten.

Es seien a, b reelle Zahlen. Folglich gibt es Cauchyfolgen $(a_n), (b_n)$ in \mathbb{Q} , so daß $a = \langle a_n \rangle$, $b = \langle b_n \rangle$. Dann sei:

3/2/9

$$a \pm b = \langle a_n \rangle \pm \langle b_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle a_n \pm b_n \rangle \text{ für alle } n,$$

$$a \cdot b = \langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle a_n \cdot b_n \rangle \text{ für alle } n, \text{ und}$$

$$a < b \iff \langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle \text{ und } a_n < b_n \text{ für fast alle } n.$$

($\langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle$ bedeutet, daß (a_n) und (b_n) nicht grenzwertgleich sind.)

$$-\langle a_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle -a_n \rangle,$$

$$\frac{1}{\langle a_n \rangle} \stackrel{\text{Df}}{=} \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle; \quad \text{Voraussetzung: } a_n \neq 0 \text{ und } (a_n) \text{ ist keine Nullfolge.}$$

Die Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Repräsentanten; dies bedeutet z.B. für die Addition:

Sind (a'_n) und (b'_n) andere Repräsentanten von a bzw. b , dann muß dies zum gleichen Ergebnis führen, d.h.,

$$\text{wenn } (a_n) \sim (a'_n) \text{ und } (b_n) \sim (b'_n), \text{ so ist } (a_n + b_n) \sim (a'_n + b'_n).$$

Dies bedeutet dann nämlich, daß $\langle a_n + b_n \rangle = \langle a'_n + b'_n \rangle$, womit die gleiche reelle Zahl festgelegt ist.

Analog verfährt man mit den anderen Fällen.

Mit den so eingeführten Funktionen $+$ und \cdot und der Relation $<$ bildet die Menge der reellen Zahlen (= Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen) einen archimedisch geordneten Körper, in dem das Intervallschachtelungsaxiom gilt. Dieser Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt! (Dies hätte natürlich alles bewiesen werden müssen.)