

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Satz 3.5 (a_n) konvergiert gegen $a \iff$ jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a . 3/1/21

Definition. (*monoton wachsend bzw. monoton fallend*)

3/1/31

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

(2) (a_n) ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$).

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Divergenz von Reihen*)

4/1/2

$\sum a_i$ ist *divergent* $\overline{\text{Df}}$ $\sum a_i$ ist nicht konvergent.

Beispiel. (*Geometrische Reihe*)

4/1/3

Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.

Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; ($\sum a^i$ heißt *geometrische Reihe*).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \dots + a^n$ ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \dots + a^n)(1-a) = 1 + \dots + a^n - (a + \dots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n -ten Partialsumme berechnet.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$

Definition. (*alternierende Reihe*)

4/1/24

$\sum a_i$ heißt *alternierend*

$\stackrel{\text{Df}}{=} a_i \neq 0$ und $a_i < 0$ gdw $a_{i+1} > 0$ für jedes i
(oder aber $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ für jedes i).

Beispiele.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} - S_{2^n} &= \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n} \\ &\quad (\text{jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \frac{1}{2^{n+1}}) \\ &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \dots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\ &= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

4. Ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ alternierend und $a_i \rightarrow 0$ aber $(|a_i|)$ nicht monoton fallend, dann muß $\sum a_i$ nicht konvergent sein.

4/1/30/4

Sei $a_i = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{falls } i \text{ ungerade und } i = 2n+1, \\ -\frac{1}{2^n}, & \text{falls } i \text{ gerade und } i = 2n. \end{cases}$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = -\frac{1}{2^0} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \mp \dots$$

Wir betrachten $S_{2^{m+1}} = a_0 + \dots + a_{2^{m+1}}$.

Summiert man in dieser endlichen Summe die a_i mit ungeradem Index i , so erhält man

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{vgl. Beispiel 3.})$$

Die Summe der a_i mit geradem Index ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{2^{2m}} &= -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\right) = \\ -\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}}{1 - \frac{1}{2}} &= -2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}\right) \geq -2 \quad (\text{vgl. geometrische Reihe}) \end{aligned}$$

(denn für $i = 2^{m+1} = 2n$ ist $n = 2^m$, also $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2^m}}$).

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} S_{2^{m+1}} &= \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 1 + \frac{m}{2}} - \underbrace{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\right)}_{\leq 2} \\ &\geq 1 + \frac{m}{2} - 2 \geq \frac{m}{2} - 1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Folglich ist (S_{2^n}) eine unbeschränkte Teilfolge von (S_n) und somit $\sum a_i$ nicht konvergent.