

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

**Bemerkung.** Die Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , also die 1. Ableitung der Vektorfunktion  $f$ , heißt auch *Funktionalmatrix* oder *Jacobimatrix* von  $f$  in  $\bar{c}$ . 8/1/21

$$\text{Bez.: } f'(\bar{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{c}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{c}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{c}) \end{pmatrix} := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{c}).$$

**Beispiele.**

**Bemerkung.** (ohne Beweis)

8/1/35/3

Sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(\bar{x}) = g(x_1, \dots, x_n)$ , und  $g := (g_1, \dots, g_n)$ .

Ist die Determinante der Funktionalmatrix von  $g$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  von null verschieden, also

$$\det \left( \frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{x}) \right) \neq 0 \quad \text{für alle } \bar{x} \in U(\bar{c}),$$

dann besitzt  $g$  in  $U(\bar{c})$  eine Umkehrfunktion.

Speziell für unsere Transformationsfunktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt dann

$$\det \left( \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, \varphi)}(r, \varphi) \right) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r \neq 0.$$

Die Koordinatentransformation ist demnach außer im Punkt  $(0, 0)$  injektiv.