

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Beispiele.

1. Es sei $a_n = \frac{1}{n!}$, $a = 0$, also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. 4/4/3/1

Diese Reihe konvergiert (nach dem Quotientenkriterium) für alle reellen oder komplexen x .

2. Sei $a_n = n$, $a = 0$, also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$. 4/4/3/2

Diese Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$ (man kann wieder das Quotientenkriterium benutzen). Der Fall $|x| = 1$ muß gesondert untersucht werden.

Offenbar ist aber $(n \cdot |x|)$ keine Nullfolge, folglich ist die Reihe für $|x| = 1$ divergent.

3. Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $a = 0$, also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n$. 4/4/3/3

Diese Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$. Für $x = 1$ erhält man die harmonische Reihe, die bekanntlich nicht konvergiert, und für $x = -1$ entsteht eine spezielle alternierende Reihe, die (nach dem Leibnizkriterium) konvergiert.

Für komplexe x mit $|x| = 1$ und $x \neq \pm 1$ müßten gesonderte Untersuchungen durchgeführt werden.

4. Sei $a_n = n^n$, $a = 0$, also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n$. 4/4/3/4

Diese Reihe konvergiert nur für $x = 0$.