

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Beispiele.

1. (Anwendung des Leibniz-Kriteriums)

4/1/30/1

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}}_{:=a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent.

Offenbar ist $\sum a_n$ alternierend, $a_n \rightarrow 0$ und $|a_n| = \frac{1}{n+1}$ monoton fallend, folglich ist die betrachtete Reihe konvergent.

Sei $a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \implies a_0 = 1 > a > 0$

(vgl. Beweis zu Satz 4.6; mit dem späteren Korollar zu Satz 7.11 läßt sich leicht zeigen, daß $a = \ln 2$).

2. (Die Glieder einer Reihe dürfen nicht beliebig „umsortiert“ werden.)

4/1/30/2

Wir betrachten die Reihe aus Beispiel 1 und nehmen an, daß man die Glieder einer Reihe beliebig umsortieren darf, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots && \text{(umsortiert)} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \pm \dots}_{=0} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots && \text{(0 addiert)} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \dots && \text{(umsortiert)} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \dots \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \dots = 0 \quad \text{N!} && \text{(umsortiert und addiert)}
 \end{aligned}$$