

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.1 Operationen für Funktionen

In diesem Abschnitt werden eine Reihe von Operationen für Funktionen behandelt, die aber zum Teil nur in Strukturen (in Körpern, Vektorräumen, ...) ausgeführt werden können. 5/1/0

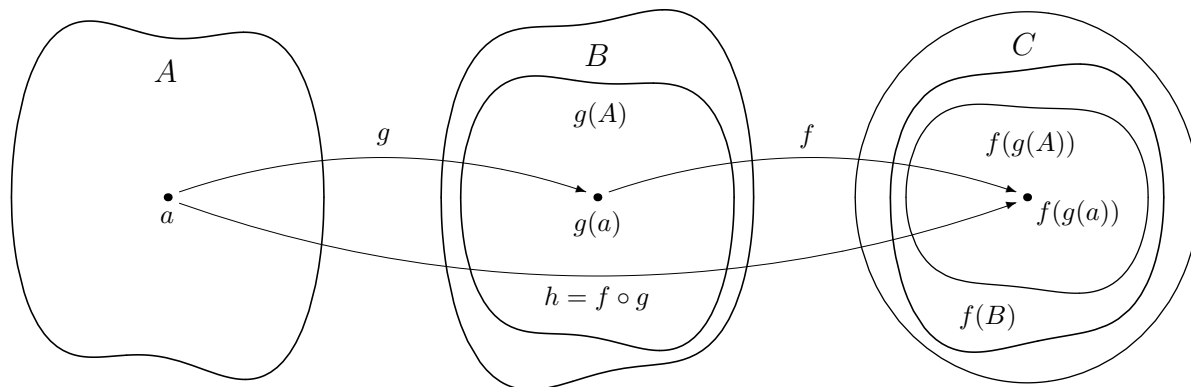
Zunächst betrachten wir aber zwei wichtige Operationen für Funktionen, die keine Struktur voraussetzen (sondern nur auf Mengen definiert sind), nämlich die Verkettung und die Inversenbildung (falls existent), ehe wir uns den reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen zuwenden.

**Definition.** (*Verkettung von Funktionen*)

5/1/1

Es seien  $g : A \rightarrow B$  und  $f : B \rightarrow C$  Funktionen, so daß  $W(g) = g(A) \subseteq D(f)$ . Die Funktion  $h : A \rightarrow C$  heißt *Verkettung* oder *Hintereinanderausführung* von  $f$  und  $g$   
 $\overline{\text{Df}}$   $h = \{(a, c) : (a, c) \in A \times C \text{ und es gibt ein } b \in B, \text{ so daß } (a, b) \in g \text{ und } (b, c) \in f\}.$

**Bez.:**  $h = f \circ g$ , (d.h., für jedes  $x \in D(g)$  ist  $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ ).



5/1/2

Abb. 5.1 Verkettung von  $f$  und  $g$

**Definition.** (*inverse Funktion*)

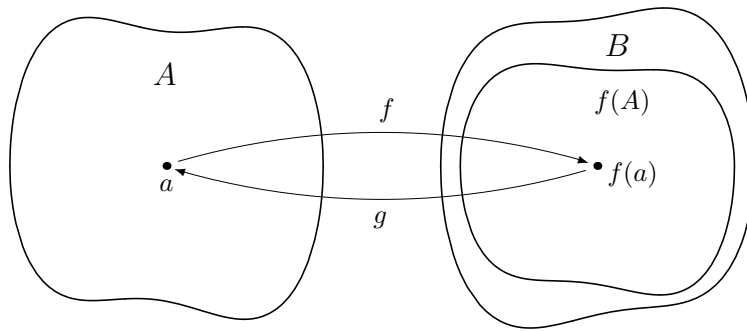
5/1/3

Es sei  $f$  injektiv.

$g$  ist *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion* von  $f$

$\overline{\text{Df}}$   $(a, b) \in g$  gdw  $(b, a) \in f$ , (d.h.,  $g(a) = b \iff f(b) = a$ .)

**Bez.:**  $g = f^{-1}$ .



5/1/4

Abb. 5.2 Bildung der Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  mit  $g : f(A) \rightarrow A$

### Folgerungen.

5/1/5

1. Offensichtlich lassen sich Umkehrfunktionen **nur von injektiven Funktionen** definieren, da sonst die Eindeutigkeit an der zweiten Stelle verletzt ist.
2. Es ist stets  $D(g) = W(f)$  und  $W(g) = D(f)$ .
3.  $g$  ist invers zu  $f \iff f$  ist invers zu  $g$ .
4. Für alle  $x \in D(f)$  und alle  $y \in D(f^{-1})$  gilt:  $f^{-1}(f(x)) = x$  und  $f(f^{-1}(y)) = y$ , also  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$  (wobei  $I$  die Identitätsfunktion ist, d.h.,  $I(x) = x$  für alle  $x$ ).

Wir befassen uns jetzt mit reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen.

5/1/6

**Definition.**  $f$  ist eine *reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen*

5/1/7

$\stackrel{\text{Df}}{=} f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und für jedes  $a \in \mathbb{R}$  existiert ein  $b \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a, b) \in f$ .

**Bez.:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Der *Graph* einer Funktion ist die geometrische Veranschaulichung der Funktion ( $:=$  Menge von Paaren) in einem geeigneten Raum mit Koordinatensystem.

5/1/8

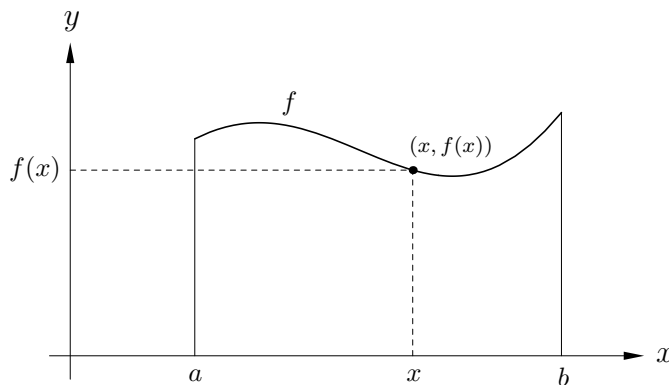


Abb. 5.3 Darstellung einer Funktion  $f$  im  $\mathbb{R}^2$  mit rechtwinkligem Koordinatensystem

### Beispiele.

Wir betrachten Funktionen  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

5/1/9/1

Der Einfachheit wegen bezeichnen wir in Zukunft die Mengen  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$  auch mit  $[a, \infty)$ ; analog benutzen wir die Bezeichnungen  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $(-\infty, a)$ .

1. Sei  $f(x) = x^2$  mit  $A := D(f) = \mathbb{R} \implies W(f) = f(A) = [0, \infty)$  (vgl. Abb. 5.4).

2. Sei  $g(x) = \sqrt{x}$  mit  $A := D(g) = [0, \infty) \implies W(g) = g(A) = [0, \infty)$  (vgl. Abb. 5.5).

5/1/9/2

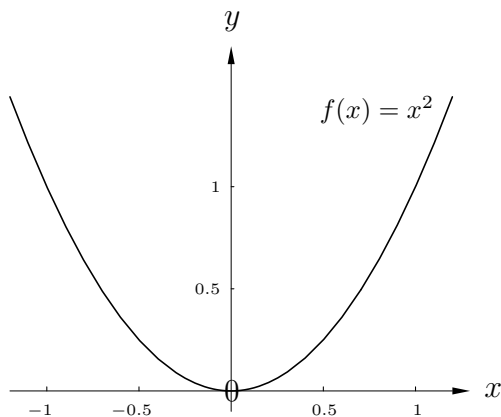


Abb. 5.4 – Parabel

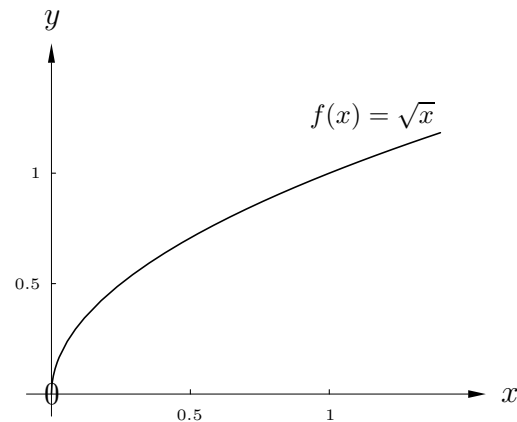


Abb. 5.5 – Wurzelfunktion

3. Offenbar ist die Funktion  $f$  im Beispiel 1 nicht injektiv. Schränkt man jedoch den Definitionsbereich von  $f$  auf  $[0, \infty)$  ein (so erhält man eigentlich eine andere Funktion, die wir aber weiterhin mit  $f$  bezeichnen werden), dann ist  $f$  injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .

5/1/9/3

Für  $f(x) = x^2$  mit  $x \geq 0$  ist

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}.$$

Löst man die Gleichung  $y = x^2 = f(x)$  nach  $x$  auf, so erhält man  $x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$ , wobei  $y \geq 0$ .

Will man die Graphen der Funktionen  $f$  und  $f^{-1}$  mit Hilfe des gleichen (rechtwinkligen) Koordinatensystems veranschaulichen, dann muß man  $x$  und  $y$  in  $y = x^2$  vertauschen und entsprechend nach  $y$  auflösen. Dadurch erhält man  $y = \sqrt{x}$ .

$f^{-1}(x)$  erweist sich dann als Spiegelung von  $f(x)$  an der Geraden  $y = x$  ( $= I(x)$ ).

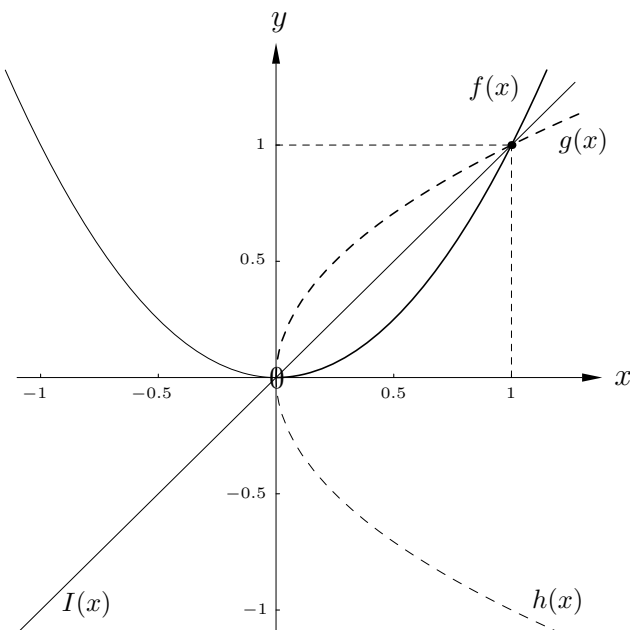


Abb. 5.6 Die Umkehrfunktion von  $f(x) = x^2$  für  $0 \leq x$  (Graph dick durchgezogen) ist durch  $g(x) = \sqrt{x}$  gegeben (Graph dick gestrichelt). Offenbar ist  $f(x)$  auch für  $x \leq 0$  injektiv (Graph dünn durchgezogen); die entsprechende Umkehrfunktion ist durch  $h(x) = -\sqrt{x}$  gekennzeichnet (Graph dünn gestrichelt). Funktionen und ihre Umkehrfunktionen sind jeweils an der Identitätsfunktion  $I(x) = x$  gespiegelt.

Wir haben schon gesehen, daß nicht alle Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen, sondern nur die injektiven. Wir betrachten jetzt eine wichtige Teilklasse von injektiven Funktionen, nämlich die streng monotonen.

5/1/10

**Definition.** (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $M \subseteq D(f)$ .

(1)  $f$  ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in  $M$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x_1, x_2 \in M$  gilt: Wenn  $x_1 \leq x_2$ , so  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (bzw.  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ).

(2)  $f$  ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in  $M$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $x_1, x_2 \in M$  gilt: Wenn  $x_1 < x_2$ , so  $f(x_1) < f(x_2)$  (bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$ ).

Analog wie bei Folgen nennen wir (in  $M$ ) monoton wachsende bzw. monoton fallende Funktionen gelegentlich auch kurz *monoton* in  $M$ . Ist  $f$  im gesamten Definitionsbereich monoton, dann heißt  $f$  monoton (ohne Angabe einer Menge).

5/1/12

**Satz 5.1** Ist  $f$  streng monoton, dann besitzt  $f$  eine Umkehrfunktion.

5/1/13

**Beweis.** g.z.z.:  $f$  ist injektiv, d.h., wenn  $x_1 \neq x_2$ , so  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

5/1/14

Wenn also  $x_1 \neq x_2$ , so  $x_1 < x_2$  oder  $x_2 < x_1 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$  und damit  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .  $\square$

**Definition.** (*rationale Operationen für Funktionen*)

5/1/15

Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . *Summe, Differenz, Produkt und Quotient* von  $f$  und  $g$  sind wie folgt definiert:

$$(1) \quad (f \pm g)(x) \stackrel{\text{Def}}{=} f(x) \pm g(x) \quad \text{für alle } x \in D(f) \cap D(g).$$

$$(2) \quad (f \cdot g)(x) \stackrel{\text{Def}}{=} f(x) \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in D(f) \cap D(g).$$

$$(3) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{für alle } x \in D(f) \cap D(g) \text{ und } g(x) \neq 0;$$

$$\text{folglich ist } D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \cap \{x : g(x) \neq 0\}.$$

**Bemerkung.**

5/1/16

Summe, Differenz, Produkt und Quotient sind die *rationalen Operationen*.