

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*)

9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_{\underline{a}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

9.7 Uneigentliche Integrale

Definition. (*uneigentliche Integrale über unbeschränkten Funktionen*)

9/7/5

Es sei $a < b$ und es gelte eine der Bedingungen:

- (1) f ist in $[a, b)$ definiert und für jedes $x \in [a, b)$ in $[a, x]$ integrierbar.
- (2) f ist in $(a, b]$ definiert und für jedes $x \in (a, b]$ in $[x, b]$ integrierbar.
- (3) $a < c < b$, und f ist für jedes $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ in $[a, x_1]$ und in $[x_2, a]$ integrierbar.

f ist in $[a, b]$ *uneigentlich integrierbar*

$$\begin{aligned} \overline{\text{Df}} \quad (1) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt \quad \text{existiert} \quad \text{bzw.} \\ (2) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t) dt \quad \text{existiert} \quad \text{bzw.} \\ (3) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \int_x^b f(t) dt \quad \text{existieren.} \end{aligned}$$

Diese Limites heißen – falls sie existieren – *uneigentliche Integrale* von f in $[a, b]$, und

$\int_a^b f(t) dt$ heißt dann *konvergent*, anderenfalls *divergent*.