

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Definition. Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung von M in N .

1/0/15

(1) f ist *surjektiv* oder eine *Abbildung auf* N

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $b \in N$ existiert ein $a \in M$, so daß $(a, b) \in f$,
(d.h., $W(f) = N$).

(2) f ist *injektiv* oder *eindeutig* von M in N

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $a_1, a_2 \in M$ gilt: Wenn $a_1 \neq a_2$, so $f(a_1) \neq f(a_2)$.

(3) f ist *bijektiv* oder *eindeutig* von M auf N

$\overline{\text{Df}}$ f ist injektiv und surjektiv.

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Bemerkung. Um also das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ für eine stetige Funktion berechnen zu können, genügt es, eine Stammfunktion F von f zu kennen und die entsprechende Differenz $F(b) - F(a)$ zu berechnen.

9/5/16

Unstetige Funktionen können bestimmt integrierbar sein, ohne eine Stammfunktion zu besitzen (vgl. Aufgabe 13, Kap. 9).

Andererseits gibt es Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht bestimmt integrierbar sind (vgl. Aufgabe 14, Kap. 9).

Bestimmte und unbestimmte Integrierbarkeit sind also unabhängig voneinander.

Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß eine Funktion f in dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, wenn f in $[a, b]$ differenzierbar und die Ableitung von f dort stetig ist.

Wir wollen uns jetzt mit der partiellen Integration und der Substitutionsregel bei bestimmten Integralen befassen.

Satz 9.21 (*Substitutionsregel*)

9/5/19

Ist f in $[a, b]$ stetig, g in $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$,
 $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{a=g(\alpha)}^{b=g(\beta)} f(t) dt.$$

Ist außerdem g injektiv, also $\alpha = g^{-1}(\alpha)$ und $\beta = g^{-1}(b)$, dann ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$