

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

Wir befassen uns in diesem Abschnitt mit Zahlenfolgen, die u.a. zur Einführung und Behandlung des für die Analysis äußerst wichtigen Grenzwertbegriffes unerlässlich sind. 3/0/0

Definition. (*Folge*) 3/0/1

F ist eine *Folge* (von reellen Zahlen)

$\overline{\text{Df}}$ F ist eine Abbildung von \mathbb{N} in \mathbb{R} ,

d.h., jeder natürlichen Zahl n wird eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so daß $F(n) = a_n$.

Bez.: $F = (a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ oder einfach $F = (a_n)$.

Die a_n heißen *Folgeglieder*. 3/0/2

Für den praktischen Gebrauch kann die Folge auch mit dem Glied a_k , $k > 0$, beginnen.

Hierzu müßte die Definition wie folgt verallgemeinert werden: Eine Folge F ist eine Abbildung aus \mathbb{N} in \mathbb{R} , wobei $D(F)$ unendlich ist.

Beispiele. 3/0/3

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right).$$

Betrachtet man $(a_n) = \left(\frac{1}{n} \right)$, dann wird selbstverständlich angenommen, daß die Folge nicht mit a_0 beginnt, sondern erst mit a_1 .

$$(a_n) = \left(\frac{1 - (-1)^n}{n+1} \right) = \left(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots \right),$$

$$(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right) = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{1} \right)^1}_2, \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} \right)^2}_{\frac{9}{4}}, \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} \right)^3}_{\frac{64}{27}}, \dots \right),$$

$$(a_n) = \left((-1)^n \right) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots),$$

$$(a_n) = (0) = (0, 0, 0, \dots),$$

$$(a_n) = (n) = (0, 1, 2, 3, \dots).$$

Nicht alle Folgen, die man bilden kann, sind für uns interessant. Wir sondern mit Hilfe einer Definition eine besonders wichtige Teilklasse aus. 3/0/4

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*) 3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Um den Konvergenzbegriff möglichst anschaulich zu formulieren, sagen wir auch: 3/1/1
 In jeder ε -Umgebung von a liegen *fast alle* Folgenglieder a_n . „Fast alle“ bedeutet „alle, mit Ausnahme höchstens endlich vieler“.

Definition. 3/1/2

- (1) (a_n) *konvergiert* (oder ist *konvergent*) in \mathbb{R}
 $\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert ein } a \in \mathbb{R}, \text{ so daß } (a_n) \text{ gegen } a \text{ konvergiert.}$
- (2) (a_n) *divergiert* (oder ist *divergent*) in \mathbb{R}
 $\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n) \text{ ist nicht konvergent in } \mathbb{R}.$

Bemerkung. Im folgenden bedeutet „Konvergenz“ – wenn nichts anderes vereinbart wird – immer „Konvergenz“ in \mathbb{R} . 3/1/3

Beispiele.

1. Sei $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. 3/1/4/1

Behauptung: (a_n) konvergiert gegen 0.

Beweis. z.z.: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:
 $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2.2(11) existiert ein n_0 , so daß $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ ist dann
 $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$ Also $\lim \frac{1}{n} = 0$.

2. Sei $(a_n) = \left(\frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3}\right)$. 3/1/4/2

Behauptung: $a_n \rightarrow 2$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left| \frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| \\ &= \left| \frac{-4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| = \frac{4n + 6}{n^2 + 2n + 3} \\ &= \underbrace{\frac{4n}{n^2 + 2n + 3}}_{\leq \frac{4n}{n^2}} + \underbrace{\frac{6}{n^2 + 2n + 3}}_{\leq \frac{6}{2n}} \\ &\leq \frac{4}{n} + \frac{3}{n} = \frac{7}{n}. \end{aligned}$$

Ist $n_0 > \frac{7}{\varepsilon}$, dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - 2| \leq \frac{7}{n} \leq \frac{7}{n_0} < \varepsilon.$$

3. Sei $(a_n) = ((-1)^n)$.

3/1/4/3

Behauptung: (a_n) ist divergent (in \mathbb{R}).

Annahme: (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$.

Nach Definition der Konvergenz erhält man: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Dies gilt insbesondere für $\varepsilon = 1$.

Für a sind zwei Fälle möglich: $a \geq 0$ oder $a < 0$.

Fall 1. $a \geq 0$.

Ist n ungerade, dann ist $a_n = -1$. Folglich ist

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| = |-1 - a| = |1 + a| \geq 1, \quad \text{!}$$

Fall 2. $a < 1$.

Ist n gerade, dann ist $a_n = 1$ und damit gilt

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| = |1 + \underbrace{(-a)}_{>0}| > 1, \quad \text{!}$$

Folglich ist (a_n) nicht konvergent.

Satz 3.1 Eine Folge (a_n) hat höchstens einen Grenzwert

3/1/5

(d.h., (a_n) konvergiert gegen höchstens eine Zahl).

Beweis. Angenommen, $a_n \rightarrow a$ und $a_n \rightarrow b$ und $a \neq b$.

3/1/6

Dann ist $|a - b| > 0$.

Nach Definition der Konvergenz gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$: $|a_n - a| < \varepsilon$, und

es existiert ein m_0 , so daß für jedes $n \geq m_0$: $|a_n - b| < \varepsilon$.

Das gilt speziell für $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$.

Ist $k = \max\{n_0, m_0\}$, dann gilt für $n \geq k$

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

Also

$$|a - b| < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{|a - b|}{2} = |a - b| \quad \text{!} \quad \square$$

Definition. (Nullfolge)

3/1/7

Eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*
 $\overline{\text{Def}}$ (a_n) konvergiert gegen 0.

Beispiele.

1. $\left(\frac{1}{n}\right)$ und (0) sind triviale Beispiele für Nullfolgen.

3/1/8/1

2. Es sei $|a| < 1$ und $(a_n) = (a^n)$.

3/1/8/2

Um nachzuweisen, daß (a^n) eine Nullfolge ist, g.z.z.:

Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$: $|a^n - 0| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$. Für $a = 0$ ist die Behauptung trivial.

Es sei jetzt $a \neq 0$. Wegen $|a| < 1$ ist $\frac{1}{|a|} > 1$.

Nach dem Korollar zur Bernoullischen Ungleichung existiert für $\frac{1}{\varepsilon}$ eine natürliche Zahl n_0 , so daß $\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$. Folglich ist $\frac{1}{|a_0|^{n_0}} > \frac{1}{\varepsilon}$, also $|a|^{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt damit $|a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \varepsilon$.

Satz 3.2 (a_n) konvergiert gegen $a \iff (a_n - a)$ konvergiert gegen 0.

3/1/9

Beweis. Trivial. \square

3/1/10

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Def}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .

(2) (a_n) ist *beschränkt*

$\overline{\text{Def}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Folgerung. (a_n) ist beschränkt gdw ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so daß $|a_n| \leq c$.

3/1/12

Beispiel. $(a_n) = \left(\frac{100^n}{n!}\right)$ ist beschränkt.

3/1/13

$$\left(\frac{100^n}{n!}\right) = \left(\underbrace{\frac{100^0}{0!}}_1, \underbrace{\frac{100^1}{1!}}_{100}, \underbrace{\frac{100^2}{2!}}_{5000}, \dots, \frac{100^{100}}{100!}, \frac{100^{101}}{101!}, \dots\right)$$

0 ist offenbar eine untere Schranke von (a_n) .

Es bleibt noch nachzuweisen, daß es auch eine obere Schranke gibt, obwohl es aufgrund der ersten Glieder nicht so zu sein scheint.

Für $n \geq 100$ und $n = 100 + k$ ist

$$a_n = \frac{100^{100+k}}{(100+k)!} = \frac{100^{100}}{100!} \cdot \underbrace{\frac{100^k}{101 \cdot 102 \cdots (100+k)}}_{<1} \leq \frac{100^{100}}{100!} = a_{100}.$$

Für $n < 100$ ist offensichtlich $a_n \leq a_{100}$. Folglich ist a_{100} eine obere Schranke von (a_n) .

Bemerkung. $\left(\frac{100^n}{n!}\right)$ ist sogar eine Nullfolge. Denn für $n = 100 + k$ und $k \geq 0$ ist

$$a_n = \frac{100^{100+k}}{(100+k)!} = \underbrace{\frac{100^{100}}{100!}}_{:=c} \cdot \underbrace{\frac{100^k}{101 \cdot 102 \cdots (100+k)}}_{\leq \frac{100}{100+k}} \leq c \cdot \frac{100}{100+k};$$

und für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist dann

$$\frac{c \cdot 100}{100+k} < \varepsilon \iff \frac{c \cdot 100}{\varepsilon} < 100+k = n,$$

d.h., für fast alle n gilt $|a_n - 0| = |a_{100+k}| < \varepsilon$.

Satz 3.3 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3/1/14

Beweis. Es sei (a_n) konvergent gegen a .

3/1/15

Für $\varepsilon = 1$ existiert dann ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon = 1$.

Es sei $d := \max\{|a_0 - a| : n < n_0\}$, $\implies |a_n - a| \leq d$ für alle $n < n_0$.

Für beliebige n gilt dann: $|a_n - a| < 1 + d$. Hieraus erhält man

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<1+d} + |a| < 1 + d + |a| := c.$$

Folglich ist (a_n) beschränkt. \square

Definition. (Häufungspunkt einer Folge)

3/1/16

Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein *Häufungspunkt* (oder *Verdichtungspunkt*) von (a_n)

$\overline{\text{Def}}$ In jeder ε -Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder a_n
(die untereinander auch gleich sein dürfen, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0
gibt es ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$).

Satz 3.4 Jede beschränkte Folge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

3/1/17

Beweis. Sei (a_n) beschränkt und $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

3/1/18

1. Fall: M ist endlich.

Dann müssen unendlich viele Folgenglieder untereinander gleich sein:

$a_{n_0} = a_{n_1} = a_{n_2} = \dots := a$. Folglich ist a ein Häufungspunkt von (a_n) .

2. Fall: M ist unendlich.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt M als nicht-leere und beschränkte Menge einen Häufungspunkt a . Dieses a ist dann auch Häufungspunkt der Folge (a_n) . \square

Bemerkung. Es gibt Folgen, die nicht beschränkt sind und

3/1/19

- (a) keinen Häufungspunkt besitzen,
- (b) genau einen Häufungspunkt besitzen,
- (c) für jedes $k \in \mathbb{N}$ genau k Häufungspunkte besitzen bzw.
- (d) unendlich viele Häufungspunkte besitzen.

Beispiele.

- (a) $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$ (kein Häufungspunkt)
- (b) $(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ (genau ein Häufungspunkt)
- (c) $(a_n) = (1, \dots, k, 1, 1, \dots, k, 2, 1, \dots, k, 3, 1, \dots, k, 4, \dots)$ (genau k Häufungspunkte)
- (d) Übungsaufgabe!

Definition. (*Teilfolge*)

3/1/20

Es sei (a_n) eine Folge und $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ (d.h., $n_i < n_j$ für $i < j$; $i, j \in \mathbb{N}$).

Dann heißt $(a_{n_i})_{i=0,1,2,\dots}$ *Teilfolge* von (a_n) .

Satz 3.5 (a_n) konvergiert gegen $a \iff$ jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a .

3/1/21

Beweis. (\longrightarrow) Sei $a_n \rightarrow a$ und (a_{n_i}) eine Teilfolge von (a_n) .

3/1/22

Wegen $a_n \rightarrow a$ gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein m_0 , so daß für jedes $n \geq m_0$: $|a_n - a| < \varepsilon$. Das gilt insbesondere für alle $n_i \geq m_0$. Offenbar ist $n_i \geq i$ und damit $|a_{n_i} - a| < \varepsilon$ für alle $i \geq m_0$.

(\longleftarrow) trivial, denn (a_n) ist eine spezielle Teilfolge von sich selbst. \square

Satz 3.6 Ist a ein Häufungspunkt der Folge (a_n) , dann existiert eine Teilfolge von (a_n) , die gegen a konvergiert.

3/1/23

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von (a_n) .

3/1/24

Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0 existiert ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$.

Für $n = 1, 2, 3, \dots$ wählen wir $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

Damit erhält man:

für $\varepsilon_1 = 1$ und $n_0 = 1$ gibt es ein $n_1 \geq n_0$, so daß $|a_{n_1} - a| < \varepsilon_1 = 1$;

für $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ und $n_0 = n_1 + 1$ gibt es ein $n_2 \geq n_0$, so daß $|a_{n_2} - a| < \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$;

für $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ und $n_0 = n_2 + 1$ gibt es ein $n_3 \geq n_0$, so daß $|a_{n_3} - a| < \varepsilon_3 = \frac{1}{3}$;

$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$

Wegen $n_0 := 0 < n_1 < n_2 < \dots$ ist (a_{n_i}) eine Teilfolge von (a_n) , und (a_{n_i}) konvergiert offenbar gegen a . \square

Korollar. Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

3/1/25

Beweis. Sei (a_n) beschränkt. Dann besitzt (a_n) einen Häufungspunkt (nach Satz 3.4) und schließlich eine konvergente Teilfolge (nach Satz 3.6). \square

3/1/26

Definition. (*Limes superior, Limes inferior*)

3/1/27

Es sei (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte (oder *Limites* von konvergenten Teilfolgen) von (a_n) .

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \left(:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = \overline{\text{Df}} \sup H(a_n)$.

$\sup H(a_n)$ heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von (a_n) [:= größter Häufungspunkt in $H(a_n)$].

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \left(:= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = \overline{\text{Df}} \inf H(a_n)$.

$\inf H(a_n)$ heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von (a_n) [:= kleinster Häufungspunkt in $H(a_n)$].

Bemerkung. Die Definition ist korrekt, denn

3/1/28

(1) $H(a_n) \neq \emptyset$, da (a_n) beschränkt ist.

(2) $H(a_n)$ ist beschränkt, denn (a_n) ist beschränkt; folglich existieren $\sup H(a_n)$ und $\inf H(a_n)$.

(3) Mit Satz 2.10 läßt sich zeigen, daß $\sup H(a_n) = \max H(a_n)$ und $\inf H(a_n) = \min H(a_n)$.

(Übungsaufgabe!)

Satz 3.7 Für beschränkte Folgen (a_n) sind die Bedingungen (1) – (3) äquivalent:

3/1/29

(1) (a_n) ist konvergent.

(2) (a_n) besitzt genau einen Häufungspunkt.

(3) $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

Beweis. Übungsaufgabe! \square

3/1/30

Definition. (*monoton wachsend* bzw. *monoton fallend*)

3/1/31

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

(2) (a_n) ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$).

Für „monoton wachsend“ bzw. „monoton fallend“ schreiben wir gelegentlich auch einfach „*monoton*“.

3/1/32

Satz 3.8 Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.

3/1/33

Beweis. (\longrightarrow) Konvergente Folgen sind beschränkt (nach Satz 3.3; hierzu ist die Monotonie nicht notwendig).

3/1/34

(\longleftarrow) Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt (für „fallend“ verläuft der Beweis analog). z.z.: (a_n) ist konvergent.

Sei $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung: $a_n \rightarrow a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung ist a kleinste obere Schranke von (a_n) , d.h., ist $a' < a$, dann ist a' keine obere Schranke von (a_n) . Sei $a' = a - \varepsilon$, dann existiert ein Folgenglied a_{n_0} , so daß $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Da (a_n) monoton wächst, gilt für alle $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a, \quad \text{also} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0. \quad \square$$

Beispiel. (Definition der *Eulerschen Zahl* e)

3/1/35

Sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Behauptung: (a_n) ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist (a_n) nach Satz 3.8 konvergent.)

z.z.: 1. $a_n < a_{n+1}$ für jedes n und

2. (a_n) ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (denn alle a_n sind positiv).

Es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\
&= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\
&\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\
&= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1 &\iff (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)(n^2 + 2n + 1) \\
&\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also $a_n < a_{n+1}$ für jedes n , und damit ist (a_n) streng monoton wachsend.

Zu 2. (a_n) ist beschränkt.

Offenbar ist $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$ für jedes n .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge (b_n) streng monoton fällt.

g.z.z.: $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ (denn alle b_n sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für (a_n) , er wird als Übungsaufgabe gestellt.

Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \quad \text{für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und (b_n) monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen e und e' , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung: $e = e'$.

Annahme: $e \neq e'$.

Dann ist $\varepsilon := |e - e'| > 0$, und folglich gilt für hinreichend große n

$$\begin{aligned} |e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls} \quad \frac{12}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Folglich ist $\varepsilon = |e - e'| < \varepsilon$ **!**

Also $e = e'$.

Bemerkung.

3/1/36

Wegen $2 \leq a_n < e = e' < b_n \leq 4$ ist $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

folglich läßt sich e beliebig genau durch rationale Zahlen annähern: $e \approx 2,7183\dots$, allerdings ist e selbst nicht rational.

Satz 3.9 (*Cauchysches Konvergenzkriterium*)

3/1/37

Eine Folge (a_n) ist konvergent (in \mathbb{R}) gdw

für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Beweis. (\longrightarrow) Sei (a_n) konvergent, $a_n \rightarrow a$.

3/1/38

Nach Definition existiert für $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß für $n \geq n_0$ stets gilt: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Folglich ist

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \text{für } m, n \geq n_0.$$

(\longleftarrow) Wir zeigen zunächst, daß (a_n) beschränkt ist.

Es sei $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein n_0 , so daß $|a_n - a_m| < 1$ für jedes $m, n \geq n_0$.

Für $m = n_0$ ist insbesondere $|a_n - a_{n_0}| < 1$.

Wir wählen $d = \max\{|a_i - a_{n_0}| : i = 0, \dots, n_0 - 1\}$.

Dann gilt für beliebige n

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + d + |a_{n_0}| := c.$$

Folglich ist (a_n) beschränkt. Damit besitzt (a_n) einen Häufungspunkt a und eine konvergierende Teilfolge (a_{n_i}) mit $a_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} a$. (Korollar zu Satz 3.6; Satz 3.4)

Nach Definition gilt dann:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein m_0 , so daß für jedes $n_i \geq m_0$ gilt: $|a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nach Voraussetzung existiert ein m'_0 , so daß für jedes $m, n \geq m'_0$ gilt: $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Für $n, n_i \geq m_0, m'_0$ gilt dann

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_i}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_i} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Also $a_n \rightarrow a$. \square

Definition. (*Cauchyfolge* oder *Fundamentalfolge*)

3/1/39

(a_n) ist eine *Cauchyfolge* (oder *Fundamentalfolge*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Korollar. *Cauchyfolgen konvergieren in \mathbb{R} .*

3/1/40

Beweis. Der Beweis ist nach Satz 3.9 trivial. \square

3/1/41

Da Cauchyfolgen in \mathbb{R} konvergieren, nennt man \mathbb{R} auch *vollständig* (bez. der Konvergenz von Cauchyfolgen).

3/1/42

In diesem Sinne ist \mathbb{Q} nicht vollständig, denn $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist z.B. eine Cauchyfolge in \mathbb{Q} , aber sie ist in \mathbb{Q} nicht konvergent.

Wir betrachten jetzt wieder Folgen in \mathbb{R} .

Satz 3.10 (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent und

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$

(4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent

$$\text{und } \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

(5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.

(6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$ bzw. $d \leq \lim b_n$.

Beweis. Es sei $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ und sei $\varepsilon > 0$.

3/1/44/1

(1). Es ist $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| := (\star)$.

1. Fall: $c = 0$. $\implies (\star) < \varepsilon$ für jedes $n \geq 0$.

2. Fall: $c \neq 0$. $\implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ für fast alle n .

Damit erhält man

$$|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \text{für fast alle } n.$$

In jedem Fall ist also

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot a = c \cdot \lim a_n.$$

(2). Nach Voraussetzung gilt: $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.

Folglich existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus erhält man

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$.

Also

$$\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n.$$

(3). Es soll $|a_n \cdot b_n - a \cdot b|$ durch ε „abgeschätzt“ werden, und zwar für fast alle n .

Es ist bekannt, daß $|a_n - a|$, $|b_n - b|$ „klein“ werden für hinreichend große n . Wir beginnen zu rechnen und versuchen ein n_0 so zu finden, daß die Abschätzung gelingt.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= \underbrace{|a_n|}_{?} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\text{klein}} + |b| \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{\text{klein}} := (\star\star) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist (a_n) konvergent, also auch beschränkt durch ein $c > 0$, d.h., $|a_n| \leq c$.

Daraus ergibt sich

$$|a_n| \cdot |b_n - b| \leq c \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Dies gilt aber nach (1) für hinreichend große n .

Analog gilt auch $|b| \cdot |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für große n .

Damit erhält man insgesamt $(\star\star) < \varepsilon$.

(4). Um diese Behauptung beweisen zu können, benötigen wir zunächst ein

Lemma. Wenn $\lim b_n = b \neq 0$, dann existiert ein m_0 , so daß für jedes $n \geq m_0$ gilt: 3/1/44/2
 $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}.$

Beweis. Sei $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Wegen $b_n \rightarrow b$ gibt es ein m_0 , so daß für jedes $n \geq m_0$ gilt: 3/1/44/3
 $|b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}.$

Weiterhin gilt:

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$-\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$\frac{|b|}{2} < |b_n| < \frac{3}{2} \cdot |b| \implies$$

$$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}. \quad \square$$

Beweis zu (4). Es ist

3/1/44/4

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| \\ &= \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\leq \frac{2}{|b|}} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| := (\star\star\star). \end{aligned}$$

Wegen $b_n \rightarrow b$ existiert für $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |b|^2. \implies (\star\star\star) < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Also $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b_n}.$

(4'). Wegen $b_n \neq 0$, $b_n \rightarrow b$ und $b \neq 0$ gilt $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$. Da auch $a_n \rightarrow a$ erhält man mit (3)

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \implies$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

(5). Es ist $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ für hinreichend große n . $\implies |a_n| \rightarrow |a|$.
Also $\lim |a_n| = |a| = |\lim a_n|$.

(6). Sei $c_n := b_n - a_n$ (≥ 0).

g.z.z.: $\lim c_n \geq 0$.

Denn dann gilt ja

$$0 \leq \lim c_n = \lim(b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n \implies$$

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Annahme: $\lim c_n := c < 0$.

Sei $\varepsilon = \frac{|c|}{2} = -\frac{c}{2}$. Dann liegen in $U_\varepsilon(c)$ fast alle c_n . \implies

$$c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon, \text{ also } c - \left(-\frac{c}{2}\right) < c_n < c + \left(-\frac{c}{2}\right) \implies$$

$$\frac{3}{2} \cdot c < c_n < \frac{c}{2} < 0 \quad \text{!}$$

Ist speziell $a_n \leq d$, so ist $\lim a_n \leq \lim d = d$ (d als konstante Folge betrachtet).

Analoges gilt für $d \leq b_n$. \square

Definition. (*bestimmte Divergenz*)

3/1/45

Es sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(a_n) divergiert bestimmt gegen $+\infty$ (bzw. gegen $-\infty$)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $c \in \mathbb{R}$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:

$$c \leq a_n \text{ (bzw. } a_n \leq c).$$

Bez.: $\lim a_n = +\infty$ bzw. $\lim a_n = -\infty$ oder auch
 $a_n \rightarrow \infty$ bzw. $a_n \rightarrow -\infty$

Beispiel. $(a_n) = (2^n)$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$.

3/1/46

Denn ist $c \in \mathbb{R}$, dann existiert ein n_0 mit $c \leq n_0 \leq 2^{n_0}$. Folglich gilt für $n \geq n_0$:
 $c \leq n_0 \leq 2^{n_0} \leq 2^n = a_n$.

Aber: $(a_n) = ((-2)^n)$ ist divergent, jedoch nicht bestimmt divergent.

Satz 3.11 Ist (a_n) bestimmt divergent und (b_n) beschränkt, dann ist $(a_n + b_n)$ bestimmt divergent. 3/1/47

Beweis. Übungsaufgabe! 3/1/48 □

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Satz 3.12 Zu jeder reellen Zahl a existiert eine Cauchyfolge (a_n) von rationalen Zahlen, so daß $\lim a_n = a$. 3/2/1

Beweis. (Idee) Sei $a \in \mathbb{R}$. Man konstruiert eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ von rationalen Zahlen mit $a_n \leq a \leq b_n$ und $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$. 3/2/2

Dazu seien a_0, b_0 beliebige rationale Zahlen mit $a_0 < a \leq b_0$.

Weiterhin seien a_n, b_n (nach Induktionsvoraussetzung) schon mit den geforderten Eigenschaften gegeben.

Ist $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, dann ist $c_{n+1} \in \mathbb{Q}$.

Jetzt definieren wir a_{n+1}, b_{n+1} wie folgt:

$$a_{n+1} := c_{n+1} \text{ und } b_{n+1} := b_n, \text{ falls } c_{n+1} < a \text{ und}$$

$$a_{n+1} := a_n \text{ und } b_{n+1} := c_{n+1}, \text{ falls } c_{n+1} \geq a.$$

Behauptung: $a_n \rightarrow a$ (und $b_n \rightarrow a$).

Es ist $a_n \leq a \leq b_n \implies a - a_n \leq b_n - a_n < \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies a_n \rightarrow a$. □

Definition. (grenzwertgleich) 3/2/3

Es seien $(a_n), (b_n)$ Cauchyfolgen.

(a_n) und (b_n) sind grenzwertgleich

$\overline{\text{Df}}$ $(a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sind z.B. grenzwertgleiche Cauchyfolgen im Bereich der rationalen Zahlen. 3/2/4

Bemerkung. „Grenzwertgleich“ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen. (Beweis mit Satz 3.10 trivial).

Dabei ist der Begriff Äquivalenzrelation wie folgt definiert:

Es sei M eine Menge und \sim eine zweistellige Relation in M . 3/2/5

\sim heißt Äquivalenzrelation in M

- $\overline{\text{Df}}$ Für alle $a, b, c \in M$ gilt:
- | | |
|--|-----------------|
| (1) $a \sim a$, | (Reflexivität) |
| (2) wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so $a \sim c$, | (Transitivität) |
| (3) wenn $a \sim b$, so $b \sim a$. | (Symmetrie) |

Ein Mengensystem $S = \{M_i : i \in I\}$ mit einer Indexmenge I heißt *Klasseneinteilung* oder *Partition* oder *Zerlegung* von M 3/2/6

- $\overline{\text{Df}}$ (1) $M_i \subseteq M$ und $M_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.
 (2) $\bigcup_{i \in I} M_i = M$, und für jedes $i, j \in I$ mit $i \neq j$ ist $M_i \cap M_j = \emptyset$.

(vgl. z.B. Literaturangabe [4], Teil I, Seiten 43 – 44.)

Eine Äquivalenzrelation \sim in M zieht eine Klasseneinteilung von M nach sich; jeweils äquivalente Elemente gehören der gleichen Klasse an (dies müßte natürlich bewiesen werden). Die so entstehenden Klassen heißen auch *Äquivalenzklassen*.

Ist M die Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen und \sim die Grenzwertgleichheit in M , dann wird M in Äquivalenzklassen grenzwertgleicher Cauchyfolgen zerlegt. Damit sind neue mathematische Objekte entstanden, die (wie Dedekindsche Schnitte) ebenfalls als reelle Zahlen interpretiert werden können.

Definition. (*reelle Zahlen*)

3/2/7

a ist eine reelle Zahl

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Cauchyfolge (a_n) von rationalen Zahlen, so daß a die Äquivalenzklasse aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen ist, die mit (a_n) grenzwertgleich sind.

Bez.: $a = \langle a_n \rangle = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (a_n - b_n) \text{ ist eine Nullfolge}\}.$

Jede Cauchyfolge (b_n) mit $(b_n) \in a = \langle a_n \rangle$ ist ein *Repräsentant* der Klasse a . Die Menge der betrachteten Äquivalenzklassen heißt *Menge der reellen Zahlen* und wird mit \mathbb{R} bezeichnet. 3/2/8

Beispielsweise ist $e = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (b_n) \text{ ist mit } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ grenzwertgleich}\}.$

Damit \mathbb{R} ein geordneter Körper wird, benötigen wir noch Rechenoperationen $+$ und \cdot und eine Ordnungsrelation $<$ in \mathbb{R} . Die Definitionen der Operationen und der Relation erfolgen mit Hilfe von Repräsentanten.

Es seien a, b reelle Zahlen. Folglich gibt es Cauchyfolgen $(a_n), (b_n)$ in \mathbb{Q} , so daß $a = \langle a_n \rangle, b = \langle b_n \rangle$. Dann sei: 3/2/9

$$a \pm b = \langle a_n \rangle \pm \langle b_n \rangle \quad \overline{\text{Df}} \quad \langle a_n \pm b_n \rangle \quad \text{für alle } n,$$

$$a \cdot b = \langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle \quad \overline{\text{Df}} \quad \langle a_n \cdot b_n \rangle \quad \text{für alle } n, \text{ und}$$

$$a < b \iff \langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle \quad \overline{\text{Df}} \quad \langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle \text{ und } a_n < b_n \text{ für fast alle } n.$$

$\langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle$ bedeutet, daß (a_n) und (b_n) nicht grenzwertgleich sind.)

$$-\langle a_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle -a_n \rangle,$$

$$\frac{1}{\langle a_n \rangle} \stackrel{\text{Df}}{=} \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle; \quad \text{Voraussetzung: } a_n \neq 0 \text{ und } (a_n) \text{ ist keine Nullfolge.}$$

Die Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Repräsentanten; dies bedeutet z.B. für die Addition:

Sind (a'_n) und (b'_n) andere Repräsentanten von a bzw. b , dann muß dies zum gleichen Ergebnis führen, d.h.,

$$\text{wenn } (a_n) \sim (a'_n) \text{ und } (b_n) \sim (b'_n), \text{ so ist } (a_n + b_n) \sim (a'_n + b'_n).$$

Dies bedeutet dann nämlich, daß $\langle a_n + b_n \rangle = \langle a'_n + b'_n \rangle$, womit die gleiche reelle Zahl festgelegt ist.

Analog verfährt man mit den anderen Fällen.

Mit den so eingeführten Funktionen $+$ und \cdot und der Relation $<$ bildet die Menge der reellen Zahlen (= Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen) einen archimedisch geordneten Körper, in dem das Intervallschachtelungsaxiom gilt. Dieser Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt! (Dies hätte natürlich alles bewiesen werden müssen.)

Abschließend betrachten wir noch Funktionenfolgen. Dazu sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in M definierte Funktion. Weiterhin sei auch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert. 3/2/10

Definition. (*Konvergenz von Funktionenfolgen*)

(1) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert an der Stelle $a \in M$ gegen b

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = b.$$

(2) (f_n) konvergiert in M gegen die Funktion f

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a),$$

(d.h., für jedes fixierte $a \in M$ konvergiert die Zahlenfolge $(f_n(a))$ gegen die Zahl $f(a)$;
diese Art Konvergenz nennen wir auch *punktweise Konvergenz*).

$$\text{Bez.: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

(3) (f_n) konvergiert in M

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert eine Funktion } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so daß } (f_n) \text{ in } M \text{ gegen } f \text{ konvergiert.}$$

Beispiel. Es sei $M = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$.

3/2/11

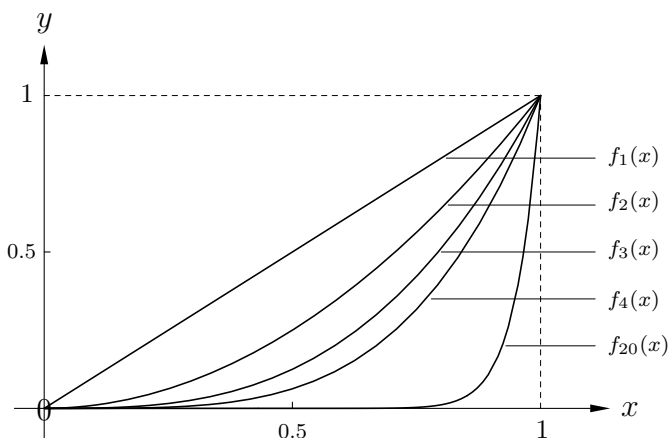


Abb. 3.1 zeigt die Konvergenz von Funktionenfolgen. Mit wachsendem n nähern sich die Funktionen $f_n(x)$ in dem Intervall $[0, 1)$ der x -Achse. Für $x = 1$ gilt stets $f_n(x) = 1$.

Für jedes fixierte $a \in [0, 1]$ mit $a < 1$ gilt offenbar $a^n \rightarrow 0$; für $a = 1$ ist $a^n = 1$, also $a^n \rightarrow 1$.

Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in M gleichmäßig gegen f

Df Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in M$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Die folgende Abbildung veranschaulicht, daß sich bei der gleichmäßigen Konvergenz für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_n(x)$ von $f(x)$ an jeder Stelle $x \in M = [a, b]$ um weniger als ε unterscheiden, falls n hinreichend groß ist; man sagt dafür auch, daß die Funktionen $f_n(x)$ in dem ε -Streifen von $f(x)$ liegen.

3/2/13

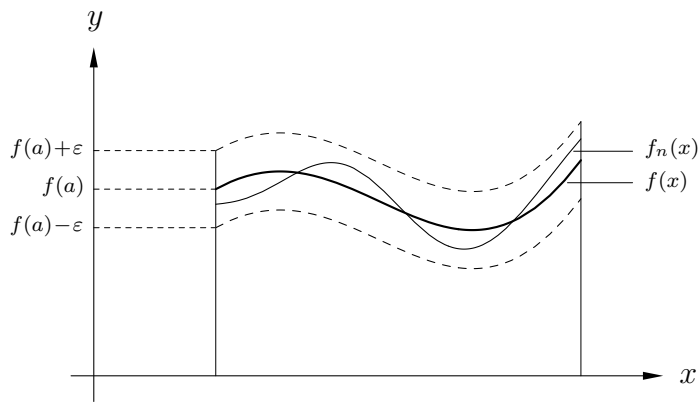


Abb. 3.1 veranschaulicht die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. Der ε -Streifen von $f(x)$ ist durch die gestrichelten Kurven dargestellt.

Die im vorhergehenden Beispiel betrachtete Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ ist nicht gleichmäßig konvergent in $[0, 1]$.

Angenommen doch, dann gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in [0, 1]$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$. Dies gilt insbesondere für $m = n_0$ und für alle $x \in [0, 1)$; hier ist zusätzlich $f(x) = 0$. Also $|f_m(x)| < \frac{1}{2}$ für alle x mit $0 \leq x < 1$. Wir wählen jetzt x „hinreichend dicht“ bei 1; $x := 1 - \delta$ mit $\delta > 0$. Dann gilt nach der Bernoullischen Ungleichung: $x^m = (1 - \delta)^m \geq 1 - m\delta$ (m fixiert). Sei δ so klein, daß $m\delta < \frac{1}{2}$, dann ist $\frac{1}{2} < x^m = |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ **N!**

In den späteren Abschnitten über Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen werden wir uns ausführlicher mit den Eigenschaften der Grenzfunktion befassen.

Übungsaufgaben

1. Geben Sie je eine Folge (a_n) mit den folgenden Eigenschaften an: 3/3/1
 - (a) (a_n) konvergiert gegen $\frac{1}{2}$,
 - (b) 3 ist Häufungspunkt von (a_n) aber nicht Grenzwert,
 - (c) (a_n) hat genau drei Häufungspunkte,
 - (d) 5 ist Grenzwert, und (a_n) ist nicht monoton,
 - (e) (a_n) ist nicht beschränkt, und 0 ist Häufungspunkt.

2. Beweisen Sie (ohne Benutzung des Satzes 3.10) die Konvergenz der Folge (a_n) 3/3/2
mit $a_n = \frac{5n+3}{3n+4}$.

3. Zeigen Sie: Zu jeder reellen Zahl a existiert eine Folge (r_n) rationaler Zahlen, die gegen a konvergiert. 3/3/3

4. Zeigen Sie: Wenn $a_n \geq 0$ und $a_n \rightarrow a$, so $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$. 3/3/4

5. Zeigen Sie: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 3/3/5

6. Zeigen Sie: Für beschränkte Folgen (a_n) von reellen Zahlen sind die nachfolgenden Bedingungen äquivalent: 3/3/6
 - (a) (a_n) ist konvergent,
 - (b) (a_n) besitzt genau einen Häufungspunkt,
 - (c) $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

7. Zeigen Sie, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ streng monoton fällt. 3/3/7

8. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte von 3/3/8
 - (a) $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$, (c) $\left(\frac{4n^3 + 2n^2 + 7}{7n^3 + n^2 + n - 1}\right)$, (e) $\left((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}\right)$,
 - (b) $\left(\frac{n!}{k^n}\right)$, $k \geq 1$, (d) $\left(\frac{n^3 + \sqrt{n^3 + 1}}{3n^2 + \sqrt{n^2 - 1}}\right)$, (f) $\left(\sqrt[n]{2n}\right)$.

9. Zeigen Sie: Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, dann ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge. 3/3/9

10. Prüfen Sie, ob die Folgen (a_n) , $n \geq 1$, beschränkt sind: 3/3/10

$$(a) \quad a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (n \text{ Wurzeln}),$$

$$(b) \quad a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n + 1},$$

$$(c) \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n = 2k, \\ \frac{n^2}{n+2} & \text{für } n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

11. Prüfen Sie, ob die Folgen (a_n) , $n \geq 1$, monoton sind:

3/3/11

$$(a) \quad a_n = \frac{n^2 + 2n + 7}{n^2 + 2n + 8},$$

$$(b) \quad a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n},$$

$$(c) \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

$$(d) \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} & \text{für } n = 2k - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} & \text{für } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

12. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums die Konvergenz der Folgen:

3/3/12

$$(a) \quad \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right), \quad (b) \quad \left(\frac{n+b}{n} \right), \quad (c) \quad \left(\frac{1}{n^p} \right), \quad p \geq 1.$$

13. Geben Sie für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ entsprechend der Definition der Konvergenz von (a_n) ein a und ein geeignetes $n_0 = n_0(\varepsilon)$ an, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für:

3/3/13

$$(a) \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}, \quad (b) \quad a_n = \frac{2\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}}, \quad (c) \quad a_n = \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}.$$

14. Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für

3/3/14

$$(a) \quad a_n = \frac{9 + \frac{n}{n+1}}{2 + \frac{1}{n}}, \quad (b) \quad a_n = \frac{n}{3n+2}, \quad (c) \quad a_n = \frac{3 + 0,5^n}{0,3^{n+1} + 5}.$$

15. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

3/3/15

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{3n+1}, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2}.$$

16. Man finde die Grenzwerte von (a_n) und (b_n) , wobei a_n und b_n durch die folgenden Rekursionen definiert sind:

3/3/16

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}; \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2 - b_n}.$$

17. Zeigen Sie:

3/3/17

(a) Die Folge (a_n) mit den induktiv definierten Folgegliedern

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) \quad \text{für } n \geq 2$$

ist eine Cauchyfolge.

(b) Ist (a_n) induktiv definiert durch

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 3,$$

dann besitzt die Folge (a_n) den Grenzwert $\frac{2}{3}$.

$$[\text{Hinweis: } a_n - \frac{2}{3} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} \quad \text{für } n \geq 1.]$$

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 3

- Definitionen: Folge, Konvergenz, Grenzwert oder Limes, Nullfolge, Beschränktheit von Folgen; 3/4/1
- Satz 3.1: Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert; 3/4/2
- Satz 3.3: Konvergente Folgen sind beschränkt; 3/4/3
- Definitionen: Häufungspunkt einer Folge, Teilfolge; 3/4/4
- Satz 3.4: Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt; 3/4/5
- Satz 3.6: Ist a Häufungspunkt von (a_n) , dann existiert eine gegen a konvergente Teilfolge von (a_n) ; 3/4/6
- Definitionen: \liminf , \limsup , Monotonie bei Zahlenfolgen; 3/4/7
- Satz 3.8: Monotone Folgen sind konvergent gdw sie beschränkt sind; 3/4/8
- Satz 3.9 (Cauchysches Konvergenzkriterium); 3/4/9
- Definition: Cauchyfolge; 3/4/10
- Satz 3.10: (Eigenschaften konvergenter Folgen := Grenzwertsatz); 3/4/11
- Definitionen: Bestimmte Divergenz; Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen; 3/4/12
- Definition der reellen Zahlen mit Hilfe von Cauchyfolgen rationaler Zahlen (Überblick). 3/4/13