

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

#### 2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

Zunächst betrachten wir ein geeignetes *Axiomensystem der reellen Zahlen*, das in vier Gruppen unterteilt ist. Dazu sei  $\mathbb{R}$  eine Menge (Menge der reellen Zahlen). In  $\mathbb{R}$  sind zwei 2-stellige *Operationen*  $+$  und  $\cdot$  und eine 2-stellige Relation  $\leq$  definiert, so daß gilt:

**I.  $\mathbb{R}$  ist ein Körper** (d.h., in  $\mathbb{R}$  gelten folgende 10 Eigenschaften:) 2/1/1

- (1)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
- (2)  $x + y = y + x$ ,
- (3) Es existiert ein Element  $0$  in  $\mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x + 0 = x$ .

**Bemerkung.** Aus (2) und (3) folgt sofort, daß es genau ein solches Element  $0$  in  $\mathbb{R}$  gibt. Denn sind  $0_1, 0_2$  Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

- (4) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existiert ein  $y \in \mathbb{R}$ , so daß  $x + y = 0$ .

**Bemerkung.** Aus (1) – (4) folgt, daß es für jedes  $x \in \mathbb{R}$  genau ein  $y \in \mathbb{R}$  gibt mit  $x + y = 0$ . Wir zeigen, daß  $y$  durch  $x$  tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Dazu sei  $x$  gegeben.

Angenommen, es gibt Elemente  $y, z$ , so daß  $x + y = 0$  und  $x + z = 0$ . Dann gilt:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z.$$

Dieses durch  $x$  eindeutig bestimmte  $y$  wird mit  $y := -x$  bezeichnet.

Die Eigenschaften (1) – (4) sind die Axiome für eine (*additive*) *abelsche Gruppe*.

- (5)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ,
- (6)  $x \cdot y = y \cdot x$ ,
- (7) Es existiert ein Element  $1$  in  $\mathbb{R}$ , so daß für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x \cdot 1 = x$ .

**Bemerkung.** Analog wie bei (3) gibt es genau ein solches Element  $1$ . Denn wären  $1_1, 1_2$  Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

- (8) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  existiert ein  $y \in \mathbb{R}$  mit  $x \cdot y = 1$ .

**Bemerkung.** Analog wie zu (4) zeigt man, daß  $y$  durch  $x$  eindeutig bestimmt ist; der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Dieses durch  $x$  eindeutig bestimmte  $y$  wird mit  $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$  bezeichnet.

- (9)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

**Bemerkung.** Aus den obigen Axiomen erhält man:  $x \cdot 0 = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

Es ist  $x = x \cdot 1 = x \cdot (\underbrace{1 + 0}_x) = x + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$ . Nach den Axiomen (2) und (3) gibt es genau ein Element  $0$ , so daß  $x = x + 0$ . Da auch  $x = x + x \cdot 0$  ist, muß dann  $x \cdot 0$  dieses Element  $0$  sein.

(10)  $0 \neq 1$ .

## II. $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper

2/1/2
-------

(d.h., in  $\mathbb{R}$  gelten zusätzlich die folgenden 5 Eigenschaften:)

- (1) Wenn  $x \leq y$  und  $y \leq z$ , so  $x \leq z$ . (*Transitivität*)
- (2) Wenn  $x \leq y$  und  $y \leq x$ , so  $x = y$ . (*Antisymmetrie*)
- (3) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ . (*Linearität*)
- (4) Wenn  $x \leq y$ , so  $x + z \leq y + z$ . (*Monotonie der Addition*)
- (5) Wenn  $0 \leq x$  und  $0 \leq y$ , so  $0 \leq x \cdot y$ .

**Bemerkung.** Aus (3) folgt sofort die *Reflexivität*, d.h. für jedes  $x$  gilt:  $x \leq x$ .  
Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome der reflexiven Ordnung*.

(4) könnte auch abgeschwächt werden zu

(4') Wenn  $0 \leq x$  und  $0 \leq y$ , so  $0 \leq x + y$ .

Es läßt sich leicht nachweisen, daß  $x \leq y \iff 0 \leq y - x$ .

Wie üblich ist  $y \geq x$  eine andere Schreibweise für  $x \leq y$ .