

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition.

3/1/2

- (1) (a_n) *konvergiert* (oder ist *konvergent*) in \mathbb{R}
 $\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß (a_n) gegen a konvergiert.
- (2) (a_n) *divergiert* (oder ist *divergent*) in \mathbb{R}
 $\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nicht konvergent in \mathbb{R} .

Beispiele.

3. Sei $(a_n) = ((-1)^n)$.

3/1/4/3

Behauptung: (a_n) ist divergent (in \mathbb{R}).

Annahme: (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$.

Nach Definition der Konvergenz erhält man: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Dies gilt insbesondere für $\varepsilon = 1$.

Für a sind zwei Fälle möglich: $a \geq 0$ oder $a < 0$.

Fall 1. $a \geq 0$.

Ist n ungerade, dann ist $a_n = -1$. Folglich ist

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| = |-1 - a| = |1 + a| \geq 1, \quad \text{!}$$

Fall 2. $a < 0$.

Ist n gerade, dann ist $a_n = 1$ und damit gilt

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| = |1 + \underbrace{(-a)}_{>0}| > 1, \quad \text{!}$$

Folglich ist (a_n) nicht konvergent.