

# Kapitel 9

## Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 9.6 Volumen von Rotationskörpern

Wir wenden uns jetzt der Bestimmung des Volumens eines sogenannten *Rotationskörpers* zu. Zunächst soll aber definiert werden, was unter einem solchen Körper zu verstehen ist. 9/6/0

Dazu sei  $I = [a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall mit  $a < b$  und sei  $f$  eine in  $I$  definierte und integrierbare Funktion, die in dem Intervall nicht negativ wird. Dann bestimmt die Punktmenge

$$M := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bekanntlich eine Fläche. Läßt man nun diese Fläche um die  $x$ -Achse rotieren, dann entsteht eine *Rotationsfigur* oder ein *Rotationskörper* (vgl. Abb. 9.13).

Wir interessieren uns nun für die Frage, ob man diesem Rotationskörper in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zuschreiben kann, und wie man gegebenenfalls dieses Volumen definieren und berechnen könnte.

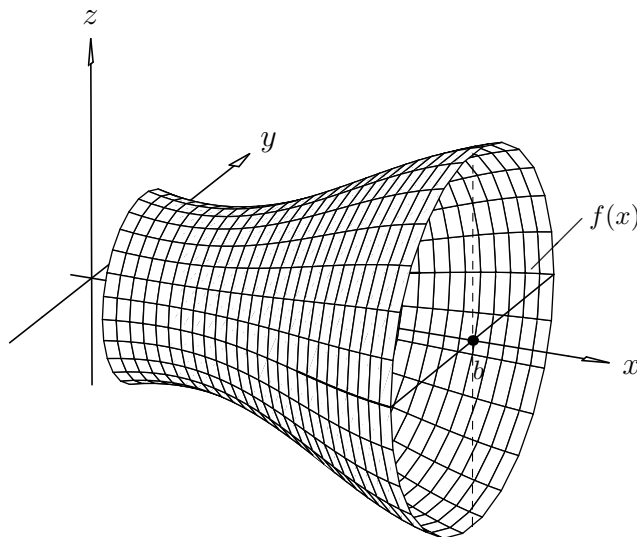


Abb. 9.13 Auf der  $x$ -Achse sei ein Intervall  $[a, b]$  gegeben, und in diesem Intervall sei eine nicht-negative Funktion  $f(x)$  definiert ( $a$  ist hier verdeckt).  $f$  wird in der  $(x, y)$ -Ebene betrachtet. Läßt man  $f$  um die  $x$ -Achse rotieren, dann entsteht im  $\mathbb{R}^3$  eine Rotationsfigur.

Das Problem ist aufgeworfen, wir versuchen es zu lösen.

Dazu sei  $\mathfrak{z} = (a_0, \dots, a_{n+1})$  eine Zerlegung von  $I$ . Parallele Ebenen im  $\mathbb{R}^3$ , die zur  $x$ -Achse senkrecht stehen und durch die jeweiligen Zerlegungspunkte auf der  $x$ -Achse gehen, schneiden aus der Rotationsfigur Kreisscheiben heraus. Das angenäherte Volumen der Kreisscheibe, die durch die Zerlegungspunkte  $a_i$  und  $a_{i+1}$  bestimmt wird, kann durch einen geeigneten Kreiszyylinder angegeben werden. Dazu sei  $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$  beliebig. Dann ist durch  $(a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$  das Volumen des entsprechenden Zylinders

mit der Höhe  $h = a_{i+1} - a_i$  und dem Radius  $f(\xi_i)$  gegeben.  $\xi_i$  ist eine Zwischenstelle in  $[a_i, a_{i+1}]$  (vgl. Abb. 9.8). Entsprechend dieser Überlegung ist durch

$$\tilde{V} = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot f^2(\xi_i) \cdot \pi$$

das angenäherte Volumen der gesamten Rotationsfigur bestimmt. Diese Summe ist offensichtlich eine Zwischensumme der Funktion  $\pi \cdot f^2(x)$  bei der Zerlegung  $\mathfrak{z}$  und dem Zwischenstellensystem  $\tau = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ . Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $I$  integrierbar, folglich ist auch  $\pi f^2$  in  $I$  integrierbar.

Betrachtet man jetzt eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge  $(\mathfrak{z}_\nu)$  von  $I$  und eine Folge  $(\tau_\nu)$  von zugehörigen Zwischenstellensystemen, dann existiert  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu)$ , und der Limes ist gleich dem Integral  $\int_a^b \pi f^2(x) dx$ .

Daher definiert man das Volumen  $V$  der Punktmenge  $M$  wie folgt:

$$V \stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{\pi f^2}(\mathfrak{z}_\nu, \tau_\nu) = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

### Beispiele.

(2). Es sei  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $I = [0, 1]$ . Dann ist das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers gegeben durch

9/6/1/2

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

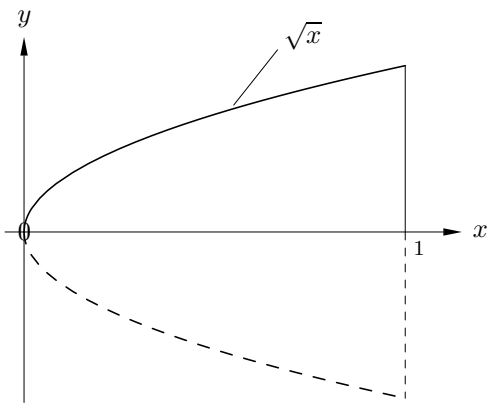


Abb. 9.14 a Die Abbildung zeigt die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  in der  $(x, y)$ -Ebene, definiert im Intervall  $[0, 1]$  bzw. die Rotationsfigur im  $\mathbb{R}^3$ , die durch Rotation von  $f$  um die  $x$ -Achse entsteht. Die  $z$ -Achse zeigt in Richtung des Betrachters.

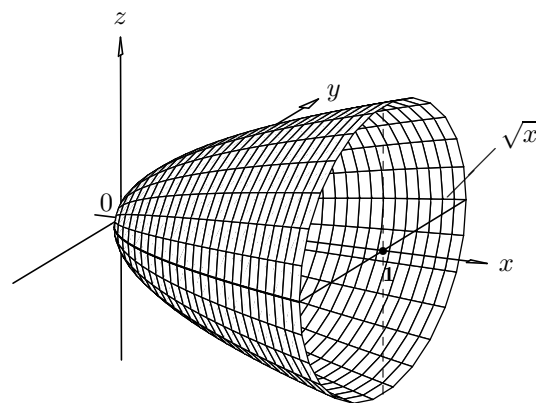


Abb. 9.14 b Diese Abbildung zeigt die gleiche Rotationsfigur wie auf der linken Seite. Diesmal ist jedoch der Rotationskörper räumlich-perspektivisch dargestellt.