

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

**Definition.** Der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit dem euklidischen Abstand heißt  $n$ -dimensionaler euklidischer Raum. 6/1/3

**Definition.** (*Beschränktheit*) 6/1/18

Es sei  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

$M$  ist *beschränkt* (in  $\mathbb{M}$ )

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{M}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $M \subseteq U_\varepsilon(a)$   
(d.h.,  $M$  ist in einer Kugel – mit endlichem Radius  $\varepsilon$  – enthalten; also für jedes  $x \in M$  gilt:  
 $\varrho(x, a) < \varepsilon$ ; vgl. Abb. 6.3)

**Definition.** (*abgeschlossene Menge*) 6/1/26

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{M}$  ist *abgeschlossen*

$\overline{\text{Df}}$  Jeder Häufungspunkt von  $M$  gehört zu  $M$ .

#### 6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Definition.** (*Stetigkeit in metrischen Räumen*) 6/2/2

Sei  $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$  und  $a \in \mathbb{M}_1$ .

$f$  ist in  $a$  *stetig*

$\overline{\text{Df}}$   $a \in D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt: Wenn  $\varrho_1(x, a) < \delta$ , so  $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .  
(Andere Formulierung: Wenn  $x \in U_\delta(a)$ , so  $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ .)

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 6.14** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ist  $f$  in  $M$  stetig, und ist  $M$  beschränkt und abgeschlossen, dann ist auch  $f(M)$  beschränkt und abgeschlossen.

6/3/16