

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.15 Sei $a < b$, und seien f, g in I integrierbar. Dann gilt:

9/5/0

(1) Wenn $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(2) Wenn $f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Satz 9.16 (Erweiterter 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/4

Sei $a < b$, seien f, g in $I = [a, b]$ integrierbar, und g wechsle in I nicht das Vorzeichen (d.h., $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ oder $g(x) \leq 0$ für alle $x \in I$).

Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{x \in I} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in I} f(x)$, so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Korollar. (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

9/5/6

Voraussetzungen über a, b, f, g, μ_1, μ_2 wie im Satz 9.16. Dann gilt:

(1) Ist $g = 1$ dann gibt es ein μ mit $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, so daß $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$.

(2) Ist f in I stetig, dann gibt es ein $\xi \in I$, so daß

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 9

- Mittelwertsätze der Integralrechnung (Satz 9.16 + Korollar, zusätzlich auch Satz 9.15),

9/11/11