

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

II. \mathbb{R} ist ein geordneter Körper

2/1/2

(d.h., in \mathbb{R} gelten zusätzlich die folgenden 5 Eigenschaften:)

- (1) Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, so $x \leq z$. (*Transitivität*)
- (2) Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$, so $x = y$. (*Antisymmetrie*)
- (3) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. (*Linearität*)
- (4) Wenn $x \leq y$, so $x + z \leq y + z$. (*Monotonie der Addition*)
- (5) Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so $0 \leq x \cdot y$.

Bemerkung. Aus (3) folgt sofort die *Reflexivität*, d.h. für jedes x gilt: $x \leq x$.

Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome der reflexiven Ordnung*.

(4) könnte auch abgeschwächt werden zu

(4') Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so $0 \leq x + y$.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß $x \leq y \iff 0 \leq y - x$.

Wie üblich ist $y \geq x$ eine andere Schreibweise für $x \leq y$.

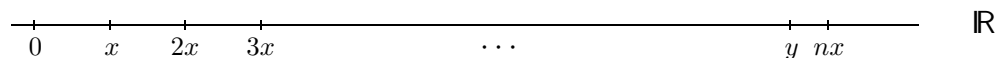
III. \mathbb{R} ist ein archimedisch geordneter Körper

2/1/3

(d.h., in \mathbb{R} gilt zusätzlich das *archimedische Axiom*)

Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x$, y gibt es eine natürliche Zahl n , so daß $y < n \cdot x$,
(wobei $x < y \iff x \leq y$ und $x \neq y$).

Dies bedeutet, daß durch endlich-oft-maliges Addieren einer positiven reellen Zahl zu sich selbst schließlich jede reelle Zahl übertroffen werden kann.



Bevor das letzte Axiom für die reellen Zahlen formuliert werden kann, benötigen wir noch einige Definitionen und Bezeichnungen.

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) nicht $(a < a)$. (*Irreflexivität*)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (*Transitivität*)

(3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)

Bemerkung. Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.

(3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)

(4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)

(5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.

(6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.

(7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.

(8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.

(9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.

(10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.

(11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.

(12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.