

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Korollar. Es sei I ein Intervall mit $a \in I$, f sei in I beliebig oft differenzierbar, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, wobei $p_n(x)$ das Taylorpolynom und $R_n(x)$ das Lagrange'sche Restglied in der Taylorschen Formel ist (siehe Satz 7.11). 7/2/12

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ für jedes $x \in I$, dann konvergiert die Folge $(p_n(x))$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ gegen $f(x)$.

(Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich f in eine sog. *Taylorreihe* entwickeln, d.h.,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$

Bemerkung. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ heißt *Taylorreihe* von $f(x)$ in a . 7/2/14

Für $a = 0$ heißt die Reihe auch *Mac Laurin'sche Reihe*.

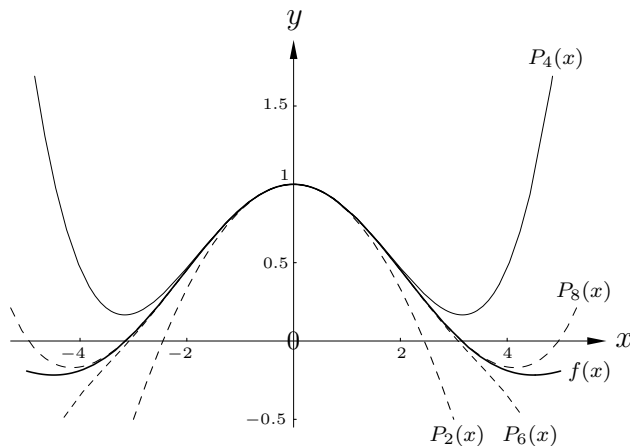


Abb. 7.8 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ und ihre Taylorpolynome $P_n(x)$ für $n = 2, 4, 6, 8$. Es ist deutlich zu erkennen, daß mit wachsendem n die Funktion $f(x)$ durch $P_n(x)$ immer besser angenähert wird. Es ist $P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}$. Man überlegt sich leicht, daß stets $P_n(x) = P_{n-1}(x)$ ist.

Die Taylorreihe von f läßt sich (formal) schon immer dann bilden, wenn f in I beliebig oft differenzierbar ist. Aber nur wenn auch $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt, dann stellt die Taylorreihe die Funktion f dar.

Wir betrachten jetzt ein Beispiel, in dem f beliebig oft differenzierbar ist, aber

$$f(x) \neq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i.$$