

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.20 Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt: 6/3/52
 f besitzt in a einen Grenzwert (der Größe c) \iff
 f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert ($:= c_r$) und einen linksseitigen Grenzwert ($:= c_l$) und beide Werte sind gleich ($c_r = c_l = c$).

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient) 7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

$$\text{Bez. } f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.15 (Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums) 7/3/21

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ differenzierbar und $c \in I$.

Besitzt f in c ein lokales Extremum, dann ist $f'(c) = 0$.

Beweis. Sei $f(c)$ ein lokales Minimum von f in I (für ein lokales Maximum verläuft der Beweis analog). 7/3/22

Dann existiert eine Umgebung $U(c)$, so daß für jedes $x \in U(c)$ mit $x \neq c$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad \text{für } x > c$$

und

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \quad \text{für } x < c.$$

Da f in c differenzierbar ist, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle c , und er ist $f'(c)$. Folglich existieren auch rechts- und linksseitiger Grenzwert dieses Differenzenquotienten und beide Grenzwerte sind gleich $f'(c)$. Also

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{> 0} = f'(c) \geq 0$$

und

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{< 0} = f'(c) \leq 0.$$

Damit gilt insgesamt $f'(c) = 0$. \square