

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.2 Das bestimmte (Riemann-) Integral

Die Elemente a_0, \dots, a_{n+1} heißen dann *Unterteilungspunkte* von \mathfrak{z} , 9/2/2
 $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ bezeichne das i -te Teilintervall bezüglich \mathfrak{z} , und
 $d(\mathfrak{z}) := \max\{a_{i+1} - a_i : i = 0, \dots, n\}$ heißt *Maximaldistanz* (oder *Norm*, *Feinheitmaß*, ...) von \mathfrak{z} .

Definition. (*Untersumme, Obersumme*) 9/2/3

Sei f in I definiert und beschränkt.

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Untersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\stackrel{\text{Df}}{\underline{S}_f(\mathfrak{z})} := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{x \in I_i} f(x).$$

(2) $\overline{S}_f(\mathfrak{z})$ heißt *Obersumme* von f in I bei der Zerlegung \mathfrak{z}

$$\stackrel{\text{Df}}{\overline{S}_f(\mathfrak{z})} := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Definition. (*Unterintegral, Oberintegral, Integral*) 9/2/9

Es sei f in I definiert und beschränkt.

Die obere Grenze (= Supremum) der Menge aller Untersummen heißt *Unterintegral* von f in I , und die untere Grenze (= Infimum) der Menge aller Obersummen heißt *Oberintegral* von f in I .

$$\begin{aligned} \text{Bez.: } \int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad &\text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx \quad \text{oder auch} \\ &\int_{\frac{a}{-}}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\frac{b}{-}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Sind Unter- und Oberintegral von f in I gleich, dann heißt f in I (*bestimmt*) *integrierbar*, und der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *bestimmtes (Riemann-) Integral* oder einfach *bestimmtes Integral* von f in I .

$$\text{Bez.: } \int_a^b f(x) dx \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x) dx$$

Satz 9.6 Ist f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ 9/2/13
ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung \mathfrak{z} von I mit $d(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt:

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$(2) \quad 0 \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Satz 9.7 Sei f in $I = [a, b]$ definiert und beschränkt und (\mathfrak{z}_ν) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von I . Dann gilt: 9/2/16

$$(1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$(2) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) = \int_a^b f(x) dx.$$

(3) Ist f in I integrierbar, dann sind die Limites in (1) und (2) gleich $\int_a^b f(x) dx$.

Beweis. (1). Es ist zu zeigen: Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein ν_0 , so daß für jedes $\nu \geq \nu_0$ gilt:

9/2/17

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \right| < \varepsilon.$$

Nach Satz 9.6 existiert für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $\left| \int_a^b f(x) dx - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_\nu) \right| < \varepsilon$, falls $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$. Nach Voraussetzung ist $(d(\mathfrak{z}_\nu))$ eine Nullfolge, folglich existiert ein ν_0 , so daß $d(\mathfrak{z}_\nu) < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_0$. Damit leistet ν_0 für die Behauptung (1) das Verlangte.

(2) beweist man analog.

(3) ist eine triviale Folgerung aus (1) und (2). □