

## Kapitel 1

### Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Nach CANTOR ist eine *Menge*  $M$  eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.

1/0/1

Wie üblich benutzen wir das Symbol  $\in$  um auszudrücken, daß das Element  $a$  zu der Menge  $M$  gehört:  $a \in M$ .

Der Cantor'sche Mengenbegriff erwies sich jedoch als widersprüchlich. Um die Jahrhundertwende 1900 wurden mehrere Antinomien konstruiert. Eine – wohl die bekannteste – die 1901 von B. RUSSEL gefunden wurde, sei hier wiedergegeben.

Wäre Cantors Mengenbegriff korrekt, dann ließe sich die Menge  $M$  aller Mengen  $X$  bilden, die sich selbst nicht als Element enthalten.

Für alle Mengen  $X$  gilt dann:  $X \in M$  genau dann, wenn  $X \notin X$ .

Da  $M$  selbst eine Menge ist, müßte speziell für  $X = M$  gelten:

$M \in M$  genau dann, wenn  $M \notin M$ .

Dies liefert offensichtlich einen Widerspruch.

Wir wollen Mengen aber trotzdem in diesem „naiven“ anschaulichen Sinne verstehen. Eine logisch befriedigende Einführung in die Mengenlehre sprengt den Rahmen dieses Buches.

### Elementare mengentheoretische Operationen und Relationen

Wir führen zunächst folgende Bezeichnungen ein:

Ist  $E(x)$  eine Eigenschaft für Elemente  $x$  (Mengen sind natürlich ebenfalls Elemente) – dies könnte z.B.  $x \neq x$ ,  $x \in M$  oder auch  $x \notin M$  sein, wobei  $M$  eine gegebene Menge ist – dann bezeichne  $\{x : E(x)\}$  die Zusammenfassung aller Elemente  $x$  mit der Eigenschaft  $E$  (dies muß, entsprechend der konstruierten Antinomie, nicht wieder eine Menge sein).

Ist  $a$  ein Element, dann ist  $\{a\}$  die Menge, die aus genau dem einen Element  $a$  besteht. Analog soll  $\{a_1, \dots, a_n\}$  die Menge sein, die aus genau den Elementen  $a_1, \dots, a_n$  besteht. Dabei werden die Elemente in der Menge natürlich nur einmal „gezählt“, falls sie in der Auflistung  $a_1, \dots, a_n$  mehrfach auftreten.

Im folgenden seien  $M, N$  Mengen.