

# Kapitel 1

## Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Eine wesentliche Aufgabe der Mathematik besteht darin, die Gültigkeit oder Ungültigkeit von mathematischen Aussagen (Behauptungen, Theoremen, ...) zu überprüfen. In diesem Zusammenhang erhebt sich sofort die Frage nach dem *Wahrheitswert* (*wahr* := W bzw. *falsch* := F) einer zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten ihrer einzelnen Bestandteile. Wir setzen hierbei das logische *Prinzip der Zweiwertigkeit* voraus, nämlich, daß jede mathematische Aussage entweder wahr oder falsch ist. In Form von Schemata (*Wahrheitswerttabellen*) kann der Wahrheitwert aussagenlogisch zusammengesetzter Aussagen dargestellt werden. Hierzu seien  $A$  und  $B$  beliebige Aussagen. Wir bilden aus  $A$ ,  $B$  kompliziertere Aussagen, die mit Hilfe von nicht, und, oder, wenn – so, gdw zusammengesetzt sind. Dann gilt:

1/0/16

$A$	$\neg A$	$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
		F	W	F	W	W	F
		F	F	F	F	W	W

Die Implikation „Wenn  $A$ , so  $B$ “ ist immer schon dann wahr, wenn die *Voraussetzung*  $A$  falsch ist. (In solchen Implikationen nennt man  $A$  *Voraussetzung* und  $B$  *Behauptung*.) Dies führt gelegentlich zu Irritationen. Aber, in der Mathematik wird die Implikation genau so benutzt. An dem folgenden kleinen Beispiel soll dies erläutert werden.

Wir geben jetzt Regeln für die Verneinung zusammengesetzter Aussagen an. Durch schrittweise Anwendung dieser Regeln lassen sich beliebige mathematische Aussagen verneinen.

1/0/21

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg A) &\equiv A, & (\neg(\neg A) \leftrightarrow A \text{ ist also immer wahr.}) \\
 \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B, \\
 \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B, \\
 \neg(A \rightarrow B) &\equiv A \wedge \neg B, \\
 \neg(A \leftrightarrow B) &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B), \\
 \neg \forall x A(x) &\equiv \exists x \neg A(x), \\
 \neg \exists x A(x) &\equiv \forall x \neg A(x).
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich sofort die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B, \\
 A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).
 \end{aligned}$$

Es werden jetzt einige wahre Aussagen betrachtet, die aufgrund ihrer logischen Struktur häufig als *Beweisprinzipien* auftreten. (In der Regel benutzt man diese Prinzipien schon rein intuitiv richtig.)

1/0/22

$$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B \quad (\text{Modus ponens oder Abtrennungsregel})$$

Aus der Gültigkeit der Aussagen  $A$  und  $A \rightarrow B$ , schließt man auf die Gültigkeit der Aussage  $B$ .

Analog interpretiert man auch die folgenden Prinzipien:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (\text{Kettenschluß})$$

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A \quad (\text{Kontraposition})$$

Die Kontraposition besagt, daß die Aussagen  $A \rightarrow B$  und  $\neg B \rightarrow \neg A$  stets den gleichen Wahrheitswert besitzen. Dies darf allerdings nicht verwechselt werden mit der Umkehrung  $B \rightarrow A$  der Implikation  $A \rightarrow B$ . Die Aussagen  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow A$  sind im allgemeinen nicht äquivalent.

$$(\neg A \rightarrow F) \rightarrow A \quad (\text{indirekter Beweis; } F \text{ steht für eine beliebige falsche Aussage})$$

Praktisch geht man beim indirekten Beweis folgendermaßen vor:

Man nimmt an, daß die Aussage  $A$  falsch ist, also die Negation  $\neg A$  gilt. Dann leitet man aus dieser Annahme etwas Falsches her, d.h., man erzeugt einen *Widerspruch*. (Dies wird häufig einfach durch das Symbol  $\nmid$  ausgedrückt). Daraus schließt man, daß die Aussage  $\neg A$  nicht richtig sein kann; also gilt die Aussage  $A$ . (Hierbei wird ganz wesentlich das Prinzip der Zweiwertigkeit benutzt.)

## Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 1

- Wahrheitswerttabellen; Verneinungen logischer Ausdrücke;

1/2/3
-------