

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

9.4 Einige Klassen integrierbarer Funktionen

Korollar. Sei $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$ und f in $I = [a, b]$ integrierbar, dann ist f in jedem Teilintervall $[a_i, a_{i+1}] \subseteq I$ integrierbar, und es ist 9/4/12

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx.$$

9.5 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz 9.15 Sei $a < b$, und seien f, g in I integrierbar. Dann gilt: 9/5/0

- (1) Wenn $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- (2) Wenn $f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \in I$, so ist $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Im folgenden seien stets (wenn nichts anderes vereinbart wird) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b, c \leq d$, $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ seien abgeschlossene Intervalle in \mathbb{R} , und D bezeichne das Rechteck in \mathbb{R}^2 , das durch $D := I \times J = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ gegeben ist. Weiterhin sei $f(x, y)$ eine in D definierte und beschränkte Funktion. Abkürzend schreiben wir für (x, y) auch \bar{x} . 10/1/0

Die Definition des bestimmten Riemann-Integrals (Abschnitt 9.2) wurde bekanntlich durch das Flächenproblem motiviert. Die analoge Fragestellung wird Motiv für sog. Doppelintegrale sein. Hierzu setzen wir zunächst $f(\bar{x}) \geq 0$ in D voraus (diese Bedingung wird nur für die Motivation benutzt; für die Definition von Mehrfachintegralen spielt sie keine Rolle).

Wir stellen uns nun die folgenden Fragen:

Kann der räumlichen Punktmenge

$$M := \{(x, y, z) : x \in I, y \in J, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zugeschrieben werden?

Wie könnte man dieses Volumen gegebenenfalls berechnen?

Bei der Behandlung dieser Fragen geht man völlig analog wie im eindimensionalen Fall vor. Man zerlegt zunächst das Rechteck D in Teilrechtecke. Dies geschieht wie folgt:

$\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$ und $\mathfrak{z}_2 = (c_0, \dots, c_{m+1})$ seien Zerlegungen der Intervalle I bzw. J , also $a = a_0 < \dots < a_{n+1} = b$ und $c = c_0 < \dots < c_{m+1} = d$ (vgl. Abb. 10.1).

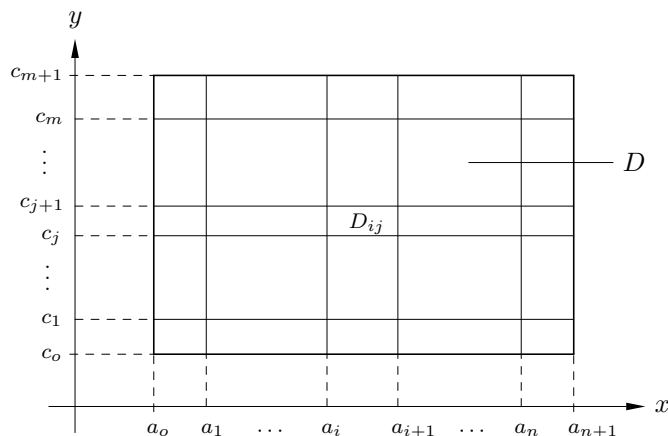


Abb. 10.1 Mit Hilfe der Zerlegungen (a_0, \dots, a_{n+1}) von $[a, b]$ und (c_0, \dots, c_{m+1}) von $[c, d]$ wird das Rechteck $D = [a, b] \times [c, d]$ in die Teilrechtecke $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ zerlegt.

Wie auch früher benutzen wir die Bezeichnungen $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ und $J_j := [c_j, c_{j+1}]$. Weiterhin sei $D_{ij} := I_i \times J_j = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Offenbar ist $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$.

$\bar{\mathfrak{z}} := \{D_{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ heißt dann *Zerlegung* (oder *Partition*) von D . Eine *Verfeinerung* von $\bar{\mathfrak{z}}$ ist durch Verfeinerungen von \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 gegeben.

Nach Voraussetzung ist f in D beschränkt, folglich ist f auch in jedem Teilrechteck D_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, beschränkt. Daher existieren

$$h_{ij} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \text{ und } H_{ij} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}).$$

Bemerkung. Im folgenden bezeichnen D und D_{ij} sowohl die Rechtecke $I \times J$ bzw. $I_i \times J_j$ als auch den Flächeninhalt der entsprechenden Rechtecke. Verwechslungen sind nicht zu befürchten, da sich die aktuelle Bedeutung jeweils aus dem Zusammenhang ergibt.

Über den Rechtecken D_{ij} errichten wir jetzt Quader mit der Grundfläche D_{ij} und der Höhe h_{ij} bzw. H_{ij} (vgl. Abb. 10.2). Dies gibt Anlaß zu folgender Definition.

Definition. (*Integral über Rechteckbereichen*)

10/1/6

Sei f in D definiert und beschränkt.

f ist in D integrierbar

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \iint_D f(x, y) dx dy = \overline{\iint_D f(x, y) dx dy}.$$

Der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral heißt dann *Riemann-Integral* oder

Doppelintegral oder kurz *Integral* von f in D .

$$\textbf{Bez.} \quad \iint_D f(x, y) \, dx dy := \int_D f(\bar{x}) \, d\bar{x}.$$

Satz 10.3 (*iterierte Integrale über Rechteckbereichen*)

10/1/13

Sei $D = [a, b] \times [c, d]$ und f in D integrierbar. Ist $f(x, y)$ für jedes fixierte $x \in$

$[a, b]$ als Funktion von y in $[c, d]$ integrierbar und ist $F(x) := \int_c^d f(x, y) \, dy$ in $[a, b]$

integrierbar, dann ist $\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b F(x) \, dx$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$, $\mathfrak{z}_2 = (c_0, \dots, c_{m+1})$ Zerlegungen von $[a, b]$ bzw. von $[c, d]$, und es sei $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$, wobei $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Dann gilt

10/1/14

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy = \sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) \, dy,$$

und somit

$$\int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) \, dy \right) dx = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sum_{j=0}^m \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Für $h_{ij} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x})$ und $H_{ij} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x})$ gilt stets

$$h_{ij} \leq f(\bar{x}) \leq H_{ij} \quad \text{für alle } \bar{x} = (x, y) \in D.$$

Ist $x \in [a, b]$, dann erhält man sofort

$$h_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) \leq \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) \, dy \leq H_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j).$$

Integriert man die letzte Ungleichung nach x , so ergibt sich

$$\begin{aligned} h_{ij} \cdot D_{ij} &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} h_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) \, dx \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &\leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} H_{ij} \cdot (c_{j+1} - c_j) \, dx \leq H_{ij} \cdot D_{ij}. \end{aligned}$$

Summiert man diese Ungleichungen nach i und j , so erhält man

$$\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) .$$

Da f in D integrierbar ist, unterscheiden sich Ober- und Untersumme bei einer geeigneten Zerlegung nur um beliebig wenig.

Da nach Definition des Doppelintegrals stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ ist, gilt schließlich

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad \square$$