

# Kapitel 10

## Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

### 10.1 Doppelintegrale

**Definition.** (*einfacher Bereich*)

10/1/20

Es seien  $[a, b], [c, d]$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

1.  $B$  ist ein *x-einfacher Bereich* (über  $[a, b]$ )  
 $\overline{\text{Df}}$  Es gibt Funktionen  $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:
  - (a)  $\varphi, \psi$  sind stetig in  $[a, b]$ ,
  - (b)  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  für jedes  $x \in [a, b]$ ,
  - (c)  $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  (vgl. Abb. 10.4).
2.  $B_1$  ist ein *y-einfacher Bereich* (über  $[c, d]$ )  
 $\overline{\text{Df}}$  Es gibt Funktionen  $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:
  - (a)  $\varphi_1, \psi_1$  sind stetig in  $[c, d]$ ,
  - (b)  $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$  für jedes  $y \in [c, d]$ ,
  - (c)  $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$  (vgl. Abb. 10.5).
3.  $B$  ist ein *einfacher Bereich*  
 $\overline{\text{Df}}$   $B$  ist *x-einfach* oder *y-einfach*.

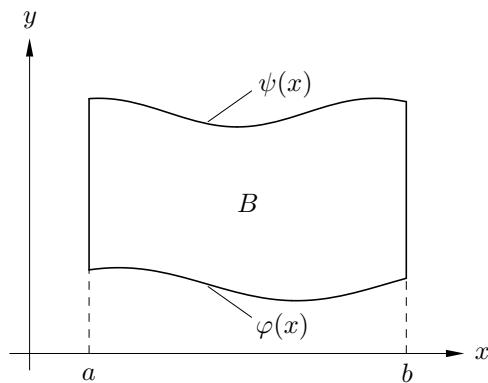


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen *x*-einfachen Bereich  $B$ .

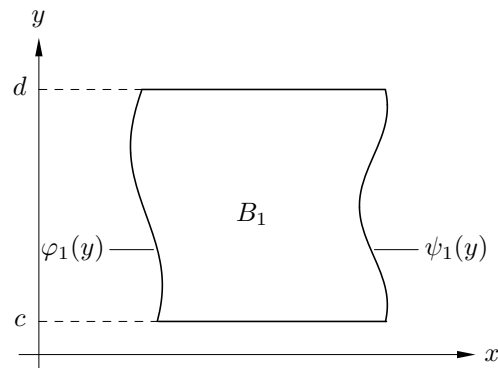


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen *y*-einfachen Bereich  $B_1$ .

**Definition.** (*Integral über einfachen Bereichen*)

10/1/24

Es sei  $B$  ein einfacher Bereich und  $D$  ein entsprechender Rechteckbereich, so daß  $B \subseteq D$ .  $f(x, y) : B \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $B$  stetig und  $f^*$  wie oben definiert.

$f$  ist in  $B$  integrierbar  $\overline{\text{Df}}$   $f^*$  ist in  $D$  integrierbar, und

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy \quad \overline{\text{Df}} \quad \iint_D f^*(x, y) \, dx \, dy.$$

$\iint_B f(x, y) \, dx dy$  heißt dann *Doppelintegral* (oder kurz *Integral*) über  $B$ .

**Satz 10.5** (*iterierte Integrale über einfachen Bereichen*)

10/1/26

- (1) Es sei  $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  ein  $x$ -einfacher Bereich und  $f(x, y)$  sei in  $B$  stetig. Dann ist  $(f(x, y))$  in  $B$  integrierbar und

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx .$$

- (2) Es sei  $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$  ein  $y$ -einfacher Bereich und  $f(x, y)$  sei in  $B_1$  stetig. Dann ist  $(f(x, y))$  in  $B_1$  integrierbar und

$$\iint_{B_1} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left( \int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) \, dx \right) dy .$$