

# Kapitel 10

## Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

### 10.1 Doppelintegrale

**Definition.** (*einfacher Bereich*)

10/1/20

Es seien  $[a, b], [c, d]$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

1.  $B$  ist ein *x-einfacher Bereich* (über  $[a, b]$ )  
 $\overline{\text{Df}}$  Es gibt Funktionen  $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:
  - (a)  $\varphi, \psi$  sind stetig in  $[a, b]$ ,
  - (b)  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  für jedes  $x \in [a, b]$ ,
  - (c)  $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  (vgl. Abb. 10.4).
2.  $B_1$  ist ein *y-einfacher Bereich* (über  $[c, d]$ )  
 $\overline{\text{Df}}$  Es gibt Funktionen  $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:
  - (a)  $\varphi_1, \psi_1$  sind stetig in  $[c, d]$ ,
  - (b)  $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$  für jedes  $y \in [c, d]$ ,
  - (c)  $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$  (vgl. Abb. 10.5).
3.  $B$  ist ein *einfacher Bereich*  
 $\overline{\text{Df}}$   $B$  ist *x-einfach* oder *y-einfach*.

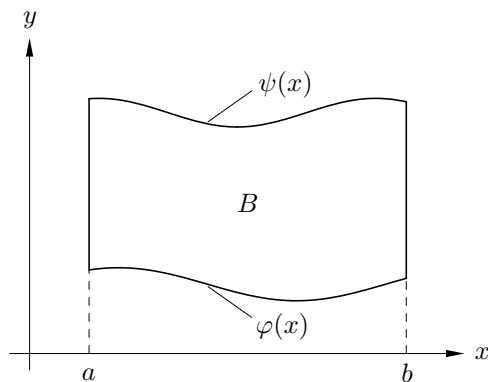


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen *x*-einfachen Bereich  $B$ .

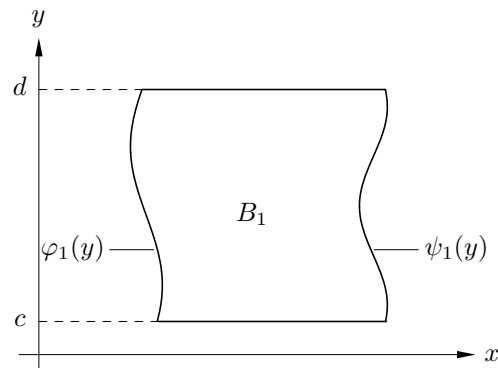


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen *y*-einfachen Bereich  $B_1$ .

**Bemerkung.** Die obige Definition des Integrals über einfachen Bereichen erfaßt nur einen Spezialfall, gewöhnlich wird das Integral allgemeiner definiert, worauf wir hier allerdings verzichten.

10/1/25

Ist  $f(x, y)$  in dem einfachen Bereich  $B$  stetig und nicht negativ, dann wird der räumlichen Punktmenge  $M = \{(x, y, z) : (x, y) \in B \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y, z)\}$  durch

$$V := \iint_B f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{ein Volumen zugeordnet (siehe Abb. 10.7).}$$

**Satz 10.5** (iterierte Integrale über einfachen Bereichen)

10/1/26

- (1) Es sei  $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  ein  $x$ -einfacher Bereich und  $f(x, y)$  sei in  $B$  stetig. Dann ist  $(f(x, y))$  in  $B$  integrierbar und

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx .$$

- (2) Es sei  $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$  ein  $y$ -einfacher Bereich und  $f(x, y)$  sei in  $B_1$  stetig. Dann ist  $(f(x, y))$  in  $B_1$  integrierbar und

$$\iint_{B_1} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) dx \right) dy .$$

**Beispiele.**

1. Volumen eines Zylinders mit dem Radius  $r$  und der Höhe  $h$  (siehe Abb. 10.8).

10/1/28/1

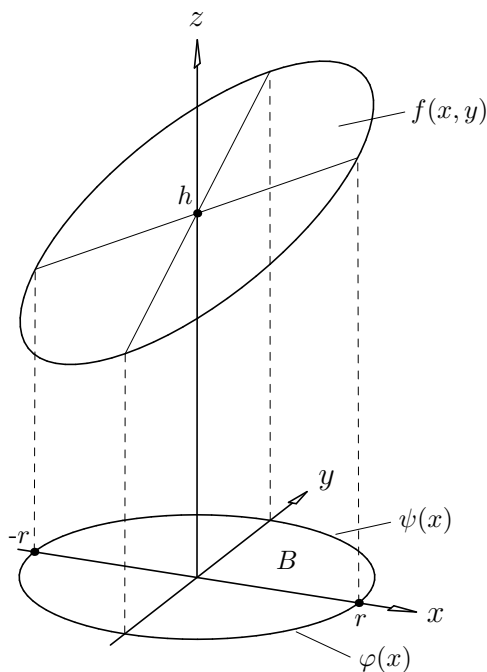


Abb. 10.8 Die Abbildung zeigt einen schräg abgeschnittenen geraden Kreiszylinder mit dem Radius  $r$  und der „Höhe“  $h$ , wobei die Höhe in dem Mittelpunkt der Grundfläche zu betrachten ist.

Der obere schräge Schnitt mit dem Kreiszylinder wird durch die Funktion  $f(x, y) = h + x + y$  erzeugt, die bekanntlich eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  definiert.

Es ist  $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$  und damit

$$y_1 := \psi(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ und } y_2 := \varphi(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

für  $-r \leq x \leq r$ . Also

$$B = \{(x, y) : -r \leq x \leq r \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Für  $f(x, y) := h + x + y$  ist  $f$  in  $B$  stetig, und somit gilt

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_{-r}^r \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\
 &= \int_{-r}^r \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (h + x + y) \, dy \right) dx = \int_{-r}^r \left[ (h + x) \cdot y + \frac{y^2}{2} \right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx \\
 &= \int_{-r}^r 2(h + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \, dx + \frac{1}{2} \int_{-r}^r \underbrace{(\psi(x)^2 - \varphi(x)^2)}_{=0} dx \\
 &= r^2 \pi h.
 \end{aligned}$$

(Die Berechnung der beiden letzten Integrale bleibt als Übungsaufgabe.)