

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Definition. (*einfacher Bereich*)

10/1/20

Es seien $[a, b], [c, d]$ Intervalle in \mathbb{R} .

1. B ist ein *x-einfacher Bereich* (über $[a, b]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ, ψ sind stetig in $[a, b]$,
 - (b) $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für jedes $x \in [a, b]$,
 - (c) $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ (vgl. Abb. 10.4).
2. B_1 ist ein *y-einfacher Bereich* (über $[c, d]$)
 $\overline{\text{Df}}$ Es gibt Funktionen $\varphi_1(y), \psi_1(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:
 - (a) φ_1, ψ_1 sind stetig in $[c, d]$,
 - (b) $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$ für jedes $y \in [c, d]$,
 - (c) $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$ (vgl. Abb. 10.5).
3. B ist ein *einfacher Bereich*
 $\overline{\text{Df}}$ B ist *x-einfach* oder *y-einfach*.

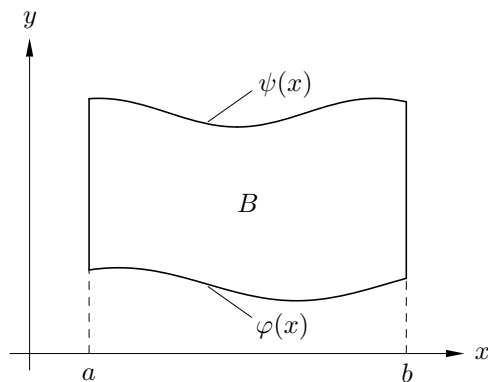


Abb. 10.4 Die Abbildung zeigt einen *x*-einfachen Bereich B .

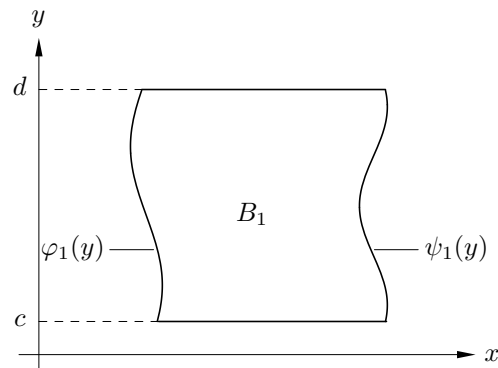


Abb. 10.5 Die Abbildung zeigt einen *y*-einfachen Bereich B_1 .

Bemerkung. Die obige Definition des Integrals über einfachen Bereichen erfaßt nur einen Spezialfall, gewöhnlich wird das Integral allgemeiner definiert, worauf wir hier allerdings verzichten.

10/1/25

Ist $f(x, y)$ in dem einfachen Bereich B stetig und nicht negativ, dann wird der räumlichen Punktmenge $M = \{(x, y, z) : (x, y) \in B \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y, z)\}$ durch

$$V := \iint_B f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{ein Volumen zugeordnet (siehe Abb. 10.7).}$$

Satz 10.5 (iterierte Integrale über einfachen Bereichen)

10/1/26

- (1) Es sei $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ ein x -einfacher Bereich und $f(x, y)$ sei in B stetig. Dann ist $(f(x, y))$ in B integrierbar und

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx .$$

- (2) Es sei $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$ ein y -einfacher Bereich und $f(x, y)$ sei in B_1 stetig. Dann ist $(f(x, y))$ in B_1 integrierbar und

$$\iint_{B_1} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) \, dx \right) dy .$$

Beispiele.

2. Das Volumen einer Halbkugel mit dem Radius r .

10/1/28/2

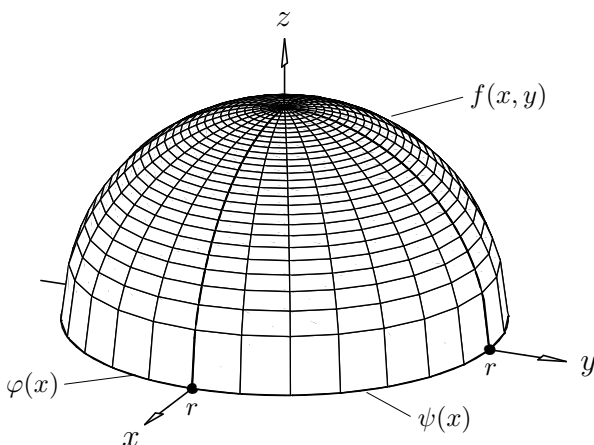


Abb. 10.9 In der Abbildung ist eine Halbkugel mit dem Radius r dargestellt. Die Grundfläche der Halbkugel entspricht dem x -einfachen Bereich B , dessen untere bzw. obere Begrenzung durch die Funktionen $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ gegeben sind.

Sei B wie im vorhergehenden Beispiel definiert und f durch $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ gegeben (f beschreibt den oberen Teil der Kugeloberfläche). Offenbar ist f in B stetig, folglich gilt:

$$\begin{aligned} V &= \iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, dy \right) dx = \frac{2}{3} r^3 \pi . \end{aligned}$$

(Die Auswertung des letzten Integrals bleibt als Übungsaufgabe.)