

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Im folgenden seien stets (wenn nichts anderes vereinbart wird) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b, c \leq d$, $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ seien abgeschlossene Intervalle in \mathbb{R} , und D bezeichne das Rechteck in \mathbb{R}^2 , das durch $D := I \times J = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ gegeben ist. Weiterhin sei $f(x, y)$ eine in D definierte und beschränkte Funktion. Abkürzend schreiben wir für (x, y) auch \bar{x} . 10/1/0

Die Definition des bestimmten Riemann-Integrals (Abschnitt 9.2) wurde bekanntlich durch das Flächenproblem motiviert. Die analoge Fragestellung wird Motiv für sog. Doppelintegrale sein. Hierzu setzen wir zunächst $f(\bar{x}) \geq 0$ in D voraus (diese Bedingung wird nur für die Motivation benutzt; für die Definition von Mehrfachintegralen spielt sie keine Rolle).

Wir stellen uns nun die folgenden Fragen:

Kann der räumlichen Punktmenge

$$M := \{(x, y, z) : x \in I, y \in J, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zugeschrieben werden?

Wie könnte man dieses Volumen gegebenenfalls berechnen?

Bei der Behandlung dieser Fragen geht man völlig analog wie im eindimensionalen Fall vor. Man zerlegt zunächst das Rechteck D in Teilrechtecke. Dies geschieht wie folgt:

$\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$ und $\mathfrak{z}_2 = (c_0, \dots, c_{m+1})$ seien Zerlegungen der Intervalle I bzw. J , also $a = a_0 < \dots < a_{n+1} = b$ und $c = c_0 < \dots < c_{m+1} = d$ (vgl. Abb. 10.1).

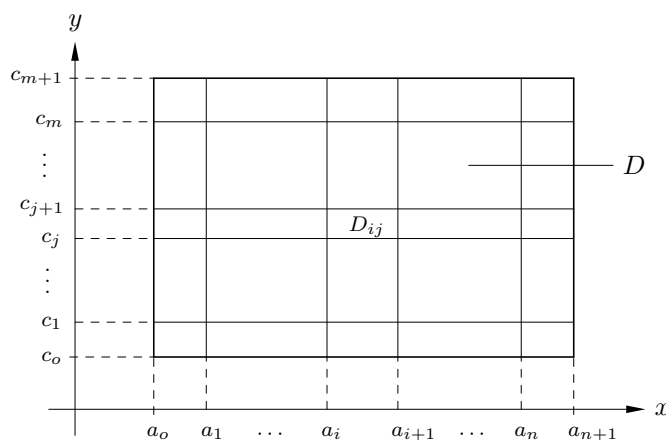


Abb. 10.1 Mit Hilfe der Zerlegungen (a_0, \dots, a_{n+1}) von $[a, b]$ und (c_0, \dots, c_{m+1}) von $[c, d]$ wird das Rechteck $D = [a, b] \times [c, d]$ in die Teilrechtecke $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ zerlegt.

Wie auch früher benutzen wir die Bezeichnungen $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ und $J_j := [c_j, c_{j+1}]$. Weiterhin sei $D_{ij} := I_i \times J_j = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Offenbar ist $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$.

$\bar{\mathfrak{z}} := \{D_{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ heißt dann *Zerlegung* (oder *Partition*) von D . Eine *Verfeinerung* von $\bar{\mathfrak{z}}$ ist durch Verfeinerungen von \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 gegeben.

Nach Voraussetzung ist f in D beschränkt, folglich ist f auch in jedem Teilrechteck D_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, beschränkt. Daher existieren

$$h_{ij} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \quad \text{und} \quad H_{ij} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}).$$

Bemerkung. Im folgenden bezeichnen D und D_{ij} sowohl die Rechtecke $I \times J$ bzw. $I_i \times J_j$ als auch den Flächeninhalt der entsprechenden Rechtecke. Verwechslungen sind nicht zu befürchten, da sich die aktuelle Bedeutung jeweils aus dem Zusammenhang ergibt.

Über den Rechtecken D_{ij} errichten wir jetzt Quader mit der Grundfläche D_{ij} und der Höhe h_{ij} bzw. H_{ij} (vgl. Abb. 10.2). Dies gibt Anlaß zu folgender Definition.

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

10/1/1

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Untersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Df}}{\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot h_{ij}.$$

(2) $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Obersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Df}}{\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot H_{ij}.$$

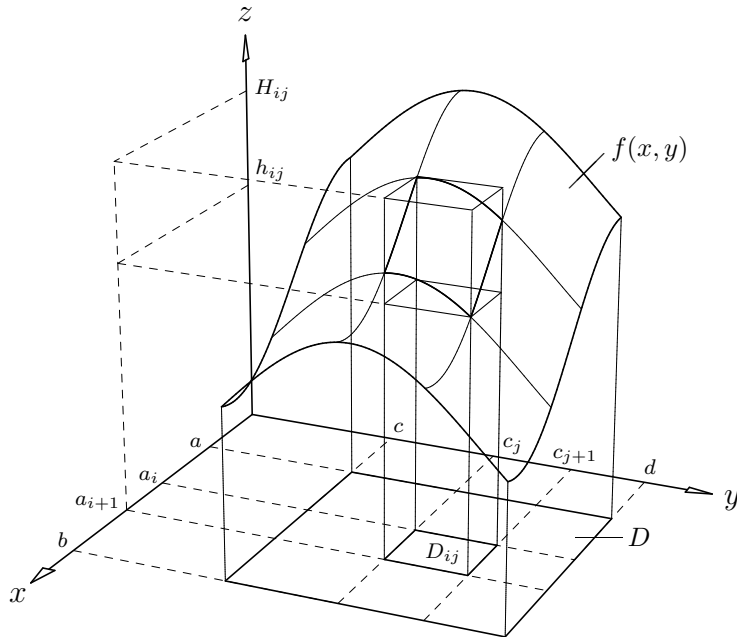


Abb. 10.2 D sei wie in Abb. 10.1 zerlegt. Über den Teilrechtecken D_{ij} werden jeweils Quader mit den Höhen $h_{ij} := \inf_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$ bzw. $H_{ij} := \sup_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$ errichtet. Offenbar ist stets $h_{ij} \leq H_{ij}$. Bildet man die Summe der Volumen der Quader mit den jeweiligen Höhen h_{ij} bzw. H_{ij} , dann erhält man die Untersumme bzw. die Obersumme von f bei der entsprechenden Zerlegung.

Satz 10.1 *Es sei f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D . Dann gilt:* 10/1/3

- (1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.
- (3) Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (4) Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.