

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Doppelintegrale

Definition. (*Untersumme, Obersumme*)

10/1/1

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Untersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot h_{ij}.$$

(2) $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ heißt *Obersumme* von f bei der Zerlegung $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} \cdot H_{ij}.$$

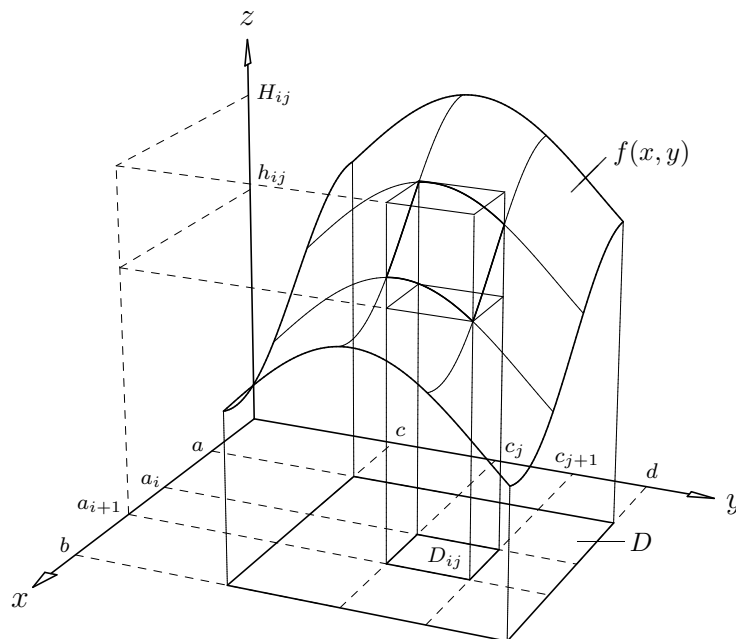


Abb. 10.2 D sei wie in Abb. 10.1 zerlegt. Über den Teilrechtecken D_{ij} werden jeweils Quader mit den Höhen $h_{ij} := \inf_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$ bzw. $H_{ij} := \sup_{(x,y) \in D_{ij}} f(x,y)$ errichtet. Offenbar ist stets $h_{ij} \leq H_{ij}$. Bildet man die Summe der Volumen der Quader mit den jeweiligen Höhen h_{ij} bzw. H_{ij} , dann erhält man die Untersumme bzw. die Obersumme von f bei der entsprechenden Zerlegung.

Satz 10.1 Es sei f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D . Dann gilt: 10/1/3

(1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.

(2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.

(3) Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.

(4) Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.

Aus Satz 10.1 (2) folgt sofort, daß die Menge aller Untersummen nach oben und die

10/1/5

Menge aller Obersummen nach unten beschränkt ist. Folglich existieren

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Def}}{=} \sup \{ \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Unterintegral von } f \text{ in } D),$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \stackrel{\text{Def}}{=} \inf \{ \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) : \bar{\mathfrak{z}} \text{ Zerlegung von } D \} \quad (\text{Oberintegral von } f \text{ in } D).$$

Aus (4) erhält man unmittelbar, daß stets $\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy$ gilt.

Analog wie im eindimensionalen Fall definieren wir jetzt das *Doppelintegral*.