

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

Im folgenden seien stets (wenn nichts anderes vereinbart wird)  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b, c \leq d$ ,  $I = [a, b]$ ,  $J = [c, d]$  seien abgeschlossene Intervalle in  $\mathbb{R}$ , und  $D$  bezeichne das Rechteck in  $\mathbb{R}^2$ , das durch  $D := I \times J = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  gegeben ist. Weiterhin sei  $f(x, y)$  eine in  $D$  definierte und beschränkte Funktion. Abkürzend schreiben wir für  $(x, y)$  auch  $\bar{x}$ . 10/1/0

Die Definition des bestimmten Riemann-Integrals (Abschnitt 9.2) wurde bekanntlich durch das Flächenproblem motiviert. Die analoge Fragestellung wird Motiv für sog. Doppelintegrale sein. Hierzu setzen wir zunächst  $f(\bar{x}) \geq 0$  in  $D$  voraus (diese Bedingung wird nur für die Motivation benutzt; für die Definition von Mehrfachintegralen spielt sie keine Rolle).

Wir stellen uns nun die folgenden Fragen:

Kann der räumlichen Punktmenge

$$M := \{(x, y, z) : x \in I, y \in J, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

in „vernünftiger“ Weise ein Volumen zugeschrieben werden?

Wie könnte man dieses Volumen gegebenenfalls berechnen?

Bei der Behandlung dieser Fragen geht man völlig analog wie im eindimensionalen Fall vor. Man zerlegt zunächst das Rechteck  $D$  in Teilrechtecke. Dies geschieht wie folgt:

$\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$  und  $\mathfrak{z}_2 = (c_0, \dots, c_{m+1})$  seien Zerlegungen der Intervalle  $I$  bzw.  $J$ , also  $a = a_0 < \dots < a_{n+1} = b$  und  $c = c_0 < \dots < c_{m+1} = d$  (vgl. Abb. 10.1).

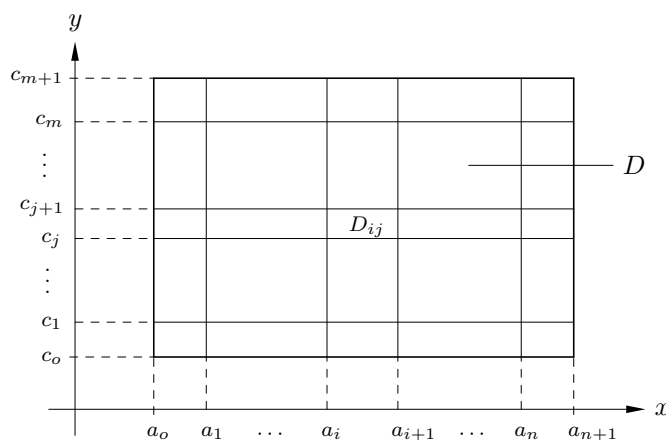


Abb. 10.1 Mit Hilfe der Zerlegungen  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  von  $[a, b]$  und  $(c_0, \dots, c_{m+1})$  von  $[c, d]$  wird das Rechteck  $D = [a, b] \times [c, d]$  in die Teilrechtecke  $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$  zerlegt.

Wie auch früher benutzen wir die Bezeichnungen  $I_i := [a_i, a_{i+1}]$  und  $J_j := [c_j, c_{j+1}]$ . Weiterhin sei  $D_{ij} := I_i \times J_j = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ . Offenbar ist  $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$ .

$\bar{\mathfrak{z}} := \{D_{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$  heißt dann *Zerlegung* (oder *Partition*) von  $D$ . Eine *Verfeinerung* von  $\bar{\mathfrak{z}}$  ist durch Verfeinerungen von  $\mathfrak{z}_1$  und  $\mathfrak{z}_2$  gegeben.

Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $D$  beschränkt, folglich ist  $f$  auch in jedem Teilrechteck  $D_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , beschränkt. Daher existieren

$$h_{ij} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \quad \text{und} \quad H_{ij} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}).$$

**Bemerkung.** Im folgenden bezeichnen  $D$  und  $D_{ij}$  sowohl die Rechtecke  $I \times J$  bzw.  $I_i \times J_j$  als auch den Flächeninhalt der entsprechenden Rechtecke. Verwechslungen sind nicht zu befürchten, da sich die aktuelle Bedeutung jeweils aus dem Zusammenhang ergibt.

Über den Rechtecken  $D_{ij}$  errichten wir jetzt Quader mit der Grundfläche  $D_{ij}$  und der Höhe  $h_{ij}$  bzw.  $H_{ij}$  (vgl. Abb. 10.2). Dies gibt Anlaß zu folgender Definition.

## 10.2 Dreifachintegrale

Dreifachintegrale sind völlig analog zu Doppelintegralen definiert.

10/2/0

Dazu seien  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ ,  $[a_3, b_3]$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ ,

$D$  sei der Quader  $D := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_3, b_3]$ , und

$f(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $D$  definiert und beschränkt.

Eine *Zerlegung*  $\bar{z}$  von  $D$  entsteht durch Zerlegungen  $\bar{z}_\nu := (a_\nu^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$  von  $[a_\nu, b_\nu]$ ,  $\nu = 1, \dots, 3$ . Dadurch entstehen kleinere Quader

$$D_{ijk} := [a_i^1, a_{i+1}^1] \times [a_j^2, a_{j+1}^2] \times [a_k^3, a_{k+1}^3] .$$

Wegen der Beschränktheit von  $f$  in  $D$  existieren insbesondere  $h_{ijk} := \inf_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$  und

$H_{ijk} := \sup_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$ . Damit lassen sich wie früher *Unter-* und *Obersummen* definieren,

wobei  $D_{ijk}$  wieder für den Quader selbst und auch für dessen Rauminhalt steht.