

# Kapitel 10

## Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

### 10.2 Dreifachintegrale

Dreifachintegrale sind völlig analog zu Doppelintegralen definiert.

10/2/0

Dazu seien  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3]$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ ,

$D$  sei der Quader  $D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$ , und

$f(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $D$  definiert und beschränkt.

Eine *Zerlegung*  $\bar{\mathfrak{z}}$  von  $D$  entsteht durch Zerlegungen  $\bar{\mathfrak{z}}_\nu := (a_\nu^\nu, \dots, a_{n_\nu+1}^\nu)$  von  $[a_\nu, b_\nu]$ ,  $\nu = 1, \dots, 3$ . Dadurch entstehen kleinere Quader

$$D_{ijk} := [a_i^1, a_{i+1}^1] \times [a_j^2, a_{j+1}^2] \times [a_k^3, a_{k+1}^3] .$$

Wegen der Beschränktheit von  $f$  in  $D$  existieren insbesondere  $h_{ijk} := \inf_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$  und  $H_{ijk} := \sup_{\bar{x} \in D_{ijk}} f(\bar{x})$ . Damit lassen sich wie früher *Unter-* und *Obersummen* definieren, wobei  $D_{ijk}$  wieder für den Quader selbst und auch für dessen Rauminhalt steht.

**Definition.** (*Untersumme, Obersumme*)

10/2/1

(1)  $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$  heißt *Untersumme* von  $f$  bei der Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Df}}{\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} D_{ijk} \cdot h_{ij} .$$

(2)  $\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$  heißt *Obersumme* von  $f$  bei der Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}}$

$$\stackrel{\text{Df}}{\overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})} := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} D_{ijk} \cdot H_{ij} .$$