

Kapitel 10

Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.2 Dreifachintegrale

Definition. (*Integral über Quadern*)

10/2/7

Es sei D ein dreidimensionaler Quader und $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in D definiert und beschränkt.

$$f \text{ ist in } D \text{ integrierbar} \stackrel{\text{Def}}{=} \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \overline{\int_D f(\bar{x}) d\bar{x}}.$$

Der gemeinsame Wert von Unter- und Oberintegral heißt *Riemann-Integral* oder *Dreifachintegral* oder kurz *Integral* von f in D .

$$\text{Bez.} \quad \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz := \int_D f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Wir werden jetzt Dreifachintegrale auf einfachen Bereichen definieren.

10/2/14

Dazu sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader und $B \subseteq D$ ein einfacher Bereich; o.B.d.A. gehen wir von einem x -einfachen Bereich B' über $[a_1, b_1]$ aus.

Sei $f(x, y, z) := f(\bar{x})$ in B definiert und stetig und

$$f^*(\bar{x}) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{für } \bar{x} \in B, \\ 0, & \text{für } \bar{x} \in D \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $x \in [a_1, b_1]$:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_2 \leq y < \varphi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_1(x) < y \leq b_2, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Für jedes $y \in [a_2, b_2]$ erhält man:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } a_3 \leq z < \varphi_2(x, y), \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0, \\ &\text{wenn } \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y), \text{ so } f^*(\bar{x}) = f(\bar{x}), \\ &\text{wenn } \psi_2(x, y) < z \leq b_3, \text{ so } f^*(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Satz 10.8 Es sei B ein einfacher Bereich (in \mathbb{R}^3), $B \subseteq D := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_3, b_3]$, und $f(x, y, z)$ sei in B definiert und stetig. Dann ist f^* in D integrierbar, und es ist

10/2/15

$$\iiint_D f^*(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$