

# Kapitel 10

## Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

### 10.2 Dreifachintegrale

#### Einfache Bereiche in $\mathbb{R}^3$

10/2/12

Es sei  $[a_1, b_1]$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi_1, \psi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$  seien in  $[a_1, b_1]$  stetig, und es sei  $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$  für alle  $x \in [a_1, b_1]$ . Dann ist

$$B' := \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\}$$

ein  $x$ -einfacher Bereich in  $\mathbb{R}^2$  (d.h. in der  $(x, y)$ -Ebene). Weiterhin seien  $\varphi_2, \psi_2$  stetige Funktionen von  $B'$  in  $\mathbb{R}$ , und für alle  $(x, y) \in B'$  gelte stets  $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$ . Dann heißt

$$B := \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x), \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

*einfacher Bereich* in  $\mathbb{R}^3$ .

Da die Variablen  $x, y, z$  hierbei gleichberechtigt sind, hätte man auch mit  $y$  oder  $z$  beginnen können. Die Entscheidung darüber, mit welcher der Variablen man beginnt, wird vernünftigerweise so getroffen, daß sich die anschließende Integration am einfachsten gestaltet.

Betrachtet man zunächst einen  $y$ -einfachen Bereich  $B'$ , dann startet man mit einem Intervall  $[a_2, b_2]$  und entsprechenden stetigen Funktionen  $\varphi_1, \psi_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß  $\varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y)$  für alle  $y \in [a_2, b_2]$ . Dann ist

$$B' = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), a_2 \leq y \leq b_2\} \quad \text{und}$$

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

In der folgenden Abbildung ist  $B'$  ein  $y$ -einfacher Bereich und  $B$  ein einfacher dreidimensionaler Bereich.

#### Satz 10.9 (iterierte Integrale über einfachen Bereichen)

10/2/19

Es sei  $B$  ein einfacher Bereich (in  $\mathbb{R}^3$ ) und  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  seien wie oben definiert. Ist  $f(x, y, z)$  in  $B$  stetig, dann ist  $f$  in  $B$  integrierbar, und es gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left( \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

### Übungsaufgaben

10. Man berechne das Integral  $\iiint_B \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$  über dem Tetraeder  $B$ , das von den Ebenen  $x=0$ ;  $y=0$ ;  $z=0$ ;  $x+y+z=1$  begrenzt wird.

10/3/10