

## Kapitel 10

### Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 10.1 Doppelintegrale

**Satz 10.3** (*iterierte Integrale über Rechteckbereichen*)

10/1/13

Sei  $D = [a, b] \times [c, d]$  und  $f$  in  $D$  integrierbar. Ist  $f(x, y)$  für jedes fixierte  $x \in [a, b]$  als Funktion von  $y$  in  $[c, d]$  integrierbar und ist  $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$  in  $[a, b]$  integrierbar, dann ist  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx$ .

**Bemerkung.** Der Satz gilt auch dann, wenn die Bedingungen für  $x$  und  $y$  entsprechend vertauscht sind.

10/1/15

**Korollar.** Ist  $f(x, y)$  in  $D$  stetig (also auch integrierbar), dann ist

10/1/16

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Satz 10.5** (*iterierte Integrale über einfachen Bereichen*)

10/1/26

(1) Es sei  $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  ein  $x$ -einfacher Bereich und  $f(x, y)$  sei in  $B$  stetig. Dann ist  $(f(x, y))$  in  $B$  integrierbar und

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

(2) Es sei  $B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}$  ein  $y$ -einfacher Bereich und  $f(x, y)$  sei in  $B_1$  stetig. Dann ist  $(f(x, y))$  in  $B_1$  integrierbar und

$$\iint_{B_1} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

#### 10.2 Dreifachintegrale

**Satz 10.7** (*dreifach iterierte Integrale über Quadern*)

10/2/8

Sei  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  und  $f(x, y, z)$  in  $D$  integrierbar.

Ist  $f(x, y, z)$  für jedes fixierte  $x \in [a_1, b_1]$  (als Funktion von  $x, y$ ) in  $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3] := D'$

integrierbar und  $F(x) := \iint_{D'} f(x, y, z) dydz$  (als Funktion von  $x$ ) in  $[a_1, b_1]$  integrierbar,

dann ist  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx$ .

**Korollar.** Ist  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  und  $f(x, y, z)$  in  $D$  stetig, dann ist 10/2/10  
( $f$  in  $D$  integrierbar und)

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

**Satz 10.9** (iterierte Integrale über einfachen Bereichen) 10/2/19

Es sei  $B$  ein einfacher Bereich (in  $\mathbb{R}^3$ ) und  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  seien wie oben definiert. Ist  $f(x, y, z)$  in  $B$  stetig, dann ist  $f$  in  $B$  integrierbar, und es gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left( \int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

## Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 10

- Berechnung von Doppel- und Dreifachintegralen.

10/4/6
--------