

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

- (0)  $0 < 1$ .
- (1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)
- (2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)
- (3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .  
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,  
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,  
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .
- (9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .
- (10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,  
Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .
- (11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .
- (12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

**Bemerkung.** Damit ist die  $m$ -te Wurzel aus einer positiven reellen Zahl definiert, und diese Wurzel ist selbst positiv. 2/2/9

**Satz 2.4**

2/2/11

- (1) *Die rationalen und die reellen Zahlen sind dicht geordnet*  
(d.h., zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere rationale Zahl,  
und zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine weitere reelle Zahl).
- (2) *Die Menge der rationalen Zahlen ist dicht in  $\mathbb{R}$*   
(d.h., zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl).
- (3) *Zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine irrationale Zahl.*

**Beweis.** (1). Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$ . Dann ist  $a < \frac{a+b}{2} < b$  (nach Satz 2.2(12)).

2/2/12

Sind zusätzlich  $a$  und  $b$  rational, dann ist auch  $\frac{a+b}{2}$  rational.

(2). Seien wieder  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$ .

Wir konstruieren eine rationale Zahl  $r$  mit der Eigenschaft  $a < r < b$ .

Wegen  $0 < b - a$  existiert (nach Satz 2.2(11)) eine natürliche Zahl  $m$ , so daß

$$0 < \frac{1}{m} < b - a \quad \text{und damit} \quad a < a + \frac{1}{m} < b.$$

1. Fall:  $0 < a$ .

Nach dem archimedischen Axiom gibt es ein  $n$ , so daß  $a < n \cdot \frac{1}{m}$ .

Sei  $n_0$  die kleinste natürliche Zahl mit  $a < n_0 \cdot \frac{1}{m}$ , also  $a \geq (n_0 - 1) \cdot \frac{1}{m}$ .

Wegen  $a < a + \frac{1}{m} < b$  ist dann

$$a < n_0 \cdot \frac{1}{m} = \underbrace{(n_0 - 1) \cdot \frac{1}{m}}_{\leq a} + \frac{1}{m} \leq a + \frac{1}{m} < b.$$

$r = \frac{n_0}{m}$  leistet also das Verlangte.

2. Fall:  $a = 0 < b$ .

Nach Satz 2.2(11) existiert ein  $n$  mit  $a = 0 < \frac{1}{n} < b$ ;

also  $r = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$  leistet das Verlangte.

3. Fall:  $a < 0 < b$ ; trivial.

4. Fall:  $a < 0 = b$ , also  $b = 0 < -a$ .

Wie im 2. Fall existiert ein  $n$ , so daß  $0 < \frac{1}{n} < -a$ . Folglich ist  $a < -\frac{1}{n} < 0 = b$ .

5. Fall:  $a < b < 0$ , also  $0 < -b < -a$ .

Nach dem Fall 1 existiert eine rationale Zahl  $r$ , so daß  $-b < r < -a$ ,  
folglich ist  $a < -r < b$  und  $-r \in \mathbb{Q}$ .

(3). Es seien  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$  und  $r_1 < r_2$ , also  $r_2 - r_1 > 0$ .

Nach dem archimedischen Axiom existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß  $\sqrt{2} < n(r_2 - r_1)$ .  
Daraus folgt

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < r_2 - r_1 \quad \text{und} \quad r_1 < \frac{\sqrt{2}}{n} + r_1 < r_2.$$

Es bleibt zu zeigen, daß  $a := \frac{\sqrt{2}}{n} + r_1$  irrational ist.

Annahme:  $a$  ist rational.

Dann ist wegen  $a - r_1 = \frac{\sqrt{2}}{n}$  auch  $n(a - r_1) = \sqrt{2}$  rational.  $\nexists!$   $\square$