

## Kapitel 2

### Reelle Zahlen

#### 2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

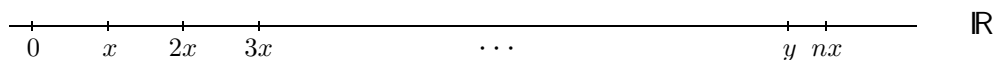
##### III. $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch geordneter Körper

2/1/3

(d.h., in  $\mathbb{R}$  gilt zusätzlich das *archimedische Axiom*)

Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 < x, y$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so daß  $y < n \cdot x$ ,  
(wobei  $x < y \stackrel{\text{Df}}{\iff} x \leq y$  und  $x \neq y$ ).

Dies bedeutet, daß durch endlich-oft-maliges Addieren einer positiven reellen Zahl zu sich selbst schließlich jede reelle Zahl übertroffen werden kann.



Bevor das letzte Axiom für die reellen Zahlen formuliert werden kann, benötigen wir noch einige Definitionen und Bezeichnungen.

#### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

- (0)  $0 < 1$ .
- (1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)
- (2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)
- (3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .  
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,  
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,  
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .

(9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,  
 Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .

(10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,  
 Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,  
 Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .

(11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .

(12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

**Lemma.** (Bernoullische Ungleichung)

2/2/8/2

Ist  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq -1$  und ist  $m$  eine natürliche Zahl, dann gilt  $(1+a)^m \geq 1+ma$ .

**Korollar.** Sind  $a, b \in \mathbb{R}$  und ist  $1 < a$ , dann existiert eine natürliche Zahl  $m$ , so daß  $b < a^m$ . 2/2/8/4

**Beweis.** Der Beweis erfolgt ohne Schwierigkeiten mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung und des archimedischen Axioms. (Übungsaufgabe!)  $\square$

2/2/8/5