

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Wir verabreden zunächst folgende Bezeichnungen:

2/2/0

Das durch $a \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Element $-a$ heißt *invers* zu a .

Falls $a \neq 0$, dann heißt $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *reziprok* (oder *invers* bez. der Multiplikation) zu a .

$a - b$ und $\frac{a}{b}$ dienen als Abkürzungen für $a + (-b)$ bzw. für $a \cdot \frac{1}{b}$.

Daraus ergibt sich sofort: $0 - b = 0 + (-b) = (-b) + 0 = -b$.

Satz 2.1 Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

2/2/1

$$(1) \quad -(-a) = a, \quad -0 = 0, \quad (-1) \cdot a = -a.$$

$$(2) \quad \frac{a}{1} = a.$$

$$(3) \quad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \quad \text{falls } a \neq 0.$$

$$(4) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc, \quad \text{falls } b, d \neq 0.$$

Beweis. (1). Nach Eigenschaft I(4) ist $(-a) + (-(-a)) = 0$. Weiterhin gilt $a + (-a) = 0 = (-a) + a$. Folglich sind $-(-a)$ und a inverse Elemente von $-a$. Da das Inverse eines Elements eindeutig bestimmt ist, muß $-(-a) = a$ sein.

2/2/2

Es ist stets $a + 0 = a$, speziell auch für $a = -0$. Folglich gilt nach I(2)

$$-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0, \quad \text{also } -0 = 0.$$

Weiterhin ist $a + (-a) = 0$ und $a = a \cdot 1$. Dann gilt

$$a + (-1) \cdot a = a \cdot 1 + (-1) \cdot a = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot \underbrace{(1 + (-1))}_{=0} = a \cdot 0 = 0.$$

Folglich ist $(-1) \cdot a$ invers zu a . Andererseits ist auch $-a$ invers zu a . Da das inverse Element von a eindeutig bestimmt ist, gilt $(-1) \cdot a = -a$.

Die Behauptungen (2) – (4) bleiben als Übungsaufgaben. \square

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

$$(0) \quad 0 < 1.$$

$$(1) \quad \text{nicht}(a < a). \quad (\text{Irreflexivität})$$

$$(2) \quad \text{Wenn } a < b \text{ und } b < c, \text{ so } a < c. \quad (\text{Transitivität})$$

$$(3) \quad \text{Für jedes } a, b \text{ gilt: } a < b \text{ oder } a = b \text{ oder } b < a. \quad (\text{Konnexität})$$

Bemerkung. Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.

- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Beweis. Wir beweisen hier nicht alle diese Eigenschaften, sondern greifen uns nur einige als Beispiele heraus. Die verbleibenden Behauptungen werden durch ähnliche Überlegungen gezeigt. Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß $a < b \iff a \leq b$ und $a \neq b$. 2/2/4

(0). I(10) besagt: $0 \neq 1$; II(3) liefert $0 \leq 1$ oder $1 \leq 0$.

Wäre $1 \leq 0$, so erhielte man aus II(4): $\underbrace{1 + (-1)}_{=0} \leq 0 + (-1) = -1$.

Folglich wäre $0 \leq -1$. Aus II(5) erhält man dann (mit Hilfe von Satz 2.1) $0 \leq (-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$.

Also $1 \leq 0$ und $0 \leq 1$. Aus II(3) folgt dann $0 = 1$. **N!** (zu I(10))

(1). (Beweis indirekt.)

Angenommen, es gibt ein a mit $a < a$.

Nach Definition gilt: $a < a \iff a \leq a \wedge a \neq a$. Da $a \neq a$ stets falsch ist, ist auch die Konjunktion $a \leq a \wedge a \neq a$ und damit auch $a < a$ stets falsch. **N!**

(5). Teil 1: Sei $a < b$ und $0 < c$.

Man hat zu zeigen, daß $a \cdot c < b \cdot c$.

Es genügt zu zeigen: $a \cdot c \leq b \cdot c$ und $a \cdot c \neq b \cdot c$.

Es gilt $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$ und $0 < c \iff 0 \leq c \wedge 0 \neq c$.

Aus $a \leq b$ folgt: $0 = a + (-a) \leq b + (-a) = b - a$, also $0 \leq b - a$.

Wegen $0 \leq c$ gilt dann: $0 \leq (b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c$ und somit nach II(4)

$$a \cdot c \leq (b \cdot c - a \cdot c) + a \cdot c = b \cdot c + 0 = b \cdot c.$$

Es bleibt noch zu zeigen: $a \cdot c \neq b \cdot c$.

Annahme, $a \cdot c = b \cdot c$.

Wegen $c \neq 0$ existiert $\frac{1}{c}$, folglich ist

$$a = a \cdot 1 = a \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) = (a \cdot c) \cdot \frac{1}{c} = (b \cdot c) \cdot \frac{1}{c} = b \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) = b \cdot 1 = b;$$

also $a = b$ im Widerspruch zu $a < b$.

Den 2. Teil der Behauptung (5) beweist man analog.

(7). Sei $a < b$, also $a \leq b \wedge a \neq b$.

Folglich ist $0 = a + (-a) \leq b + (-a)$ und daher

$$\begin{aligned} -b &\leq (b + (-a)) + (-b) = b + ((-a) + (-b)) = b + ((-b) + (-a)) \\ &= (b + (-b)) + (-a) = 0 + (-a) = (-a) + 0 = -a. \end{aligned}$$

Also $-b \leq -a$.

Angenommen: $-b = -a$.

Dann gilt

$$b = -(-b) = (-1) \cdot (-b) = (-1) \cdot (-a) = -(-a) = a. \quad \text{!}$$

Die Umkehrung $-b < -a \implies a < b$ beweist man analog.

(11). Sei $0 < a$, dann ist nach (10) auch $0 < \frac{1}{a}$. Wegen $0 < 1$ gibt es nach dem archimedischen Axiom eine natürliche Zahl m , so daß $a < m \cdot 1 = m$.

Analog gibt es eine natürliche Zahl n , so daß $\frac{1}{a} < n$. Nach (10) erhält man daraus

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{a}} = a. \quad \square$$

Definition. (*Potenz*) (induktive Definition)

2/2/5

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

$$a^0 \stackrel{\text{Df}}{=} 1,$$

$$a^{n+1} \stackrel{\text{Df}}{=} a^n \cdot a.$$

Bemerkung. Das Rechnen mit Potenzen wird als bekannt vorausgesetzt. Für $n \geq 1$ sei $0^n := 0$. 2/2/6

Satz 2.3 Ist $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$, dann gibt es genau ein $b > 0$, so daß $b^m = a$. 2/2/7

Bez.: $b = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$; (m -te Wurzel aus a)

Beweis. Um zu zeigen, daß es genau ein solches b gibt, hat man einerseits die Existenz und andererseits die Eindeutigkeit nachzuweisen. Wir beginnen mit dem einfacheren Eindeutigkeitsbeweis. 2/2/8/1

1. Eindeutigkeit.

Angenommen, es existieren verschiedene $b_1, b_2 > 0$ mit $b_1^m = a = b_2^m$.

Sei o.B.d.A. $b_1 < b_2$. Dann zeigt man leicht (mit Hilfe von Satz 2.2(5)) induktiv über m , daß $b_1^m < b_2^m$. *W!*

2. Existenz.

Es genügt, den Satz für $a > 1$ zu beweisen.

Ist nämlich $a = 1$, dann leistet $b = 1$ das Verlangte, und

ist $0 < a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$. Für $\frac{1}{a}$ existiert nach dem obigen Fall schon ein $c > 0$ mit $c^m = \frac{1}{a}$. Folglich ist $a = \frac{1}{c^m} = \left(\frac{1}{c}\right)^m$.

$b = \frac{1}{c}$ leistet somit das Verlangte.

Es sei nun $a > 1$.

(Zum Beweis wird eine geeignete Intervallschachtelung betrachtet.)

Wir definieren eine Folge $([a_n, b_n])$ von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{und} \quad a_n^m \leq a \leq b_n^m \quad \text{für alle } n.$$

Die Definition erfolgt induktiv über n .

Eine Lösung $b > 0$ für $b^m = a$ und $a > 1$ muß – falls eine solche existiert – in dem Intervall $[1, a]$ liegen.

Denn angenommen, $0 < b < 1$. Dann ist auch $b^m < 1 < a$, also $b^m \neq a$.

Wäre andererseits $a < b$, so wäre auch $1 < a < b < b^m$ und somit wiederum $b^m \neq a$.

Wir brauchen also nur in dem Intervall $[1, a]$ nach einer Lösung zu suchen.

Daher beginnen wir mit $a_0 = 1$, $b_0 = a$.

Dann gilt $a_0^m = 1^m = 1 \leq a \leq a^m = b_0^m$.

Es sei $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ (der Mittelpunkt des Intervalls $[a_0, b_0]$).

Für c_1 sind zwei Fälle möglich:

- (a) $c_1^m \leq a$ oder
- (b) $c_1^m > a$.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$.

Es sei

$$a_1 = c_1 \text{ und } b_1 = b_0, \text{ falls } c_1^m \leq a \text{ und}$$

$$a_1 = a_0 \text{ und } b_1 = c_1, \text{ falls } c_1^m > a.$$

Dann gilt offenbar

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \text{ und } a_1^m \leq a \leq b_1^m.$$

Die gleichen Überlegungen werden im $(n+1)$ -ten Schritt angewendet. Die Ausführung des ersten Schrittes – wir haben mit dem 0-tem Schritt begonnen – ist natürlich bei dieser induktiven Definition nicht notwendig, da er als Spezialfall des $(n+1)$ -ten Schrittes auftritt. Er wurde hier nur des besseren Verständnisses wegen angegeben.

Für n seien a_n und b_n (nach Induktionsvoraussetzung) schon definiert und zwar mit den geforderten Eigenschaften:

$$a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \text{ und } a_n^m \leq a \leq b_n^m.$$

Wir betrachten jetzt $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ (den Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$).

Für c_{n+1} sind zwei Fälle möglich:

- (a) $c_{n+1}^m \leq a$ oder
- (b) $c_{n+1}^m > a$.

Entsprechend dieser beiden Fälle definiert man das $(n+1)$ -te Intervall wie folgt:

$$a_{n+1} = c_{n+1} \text{ und } b_{n+1} = b_n, \text{ falls } c_{n+1}^m \leq a \text{ und}$$

$$a_{n+1} = a_n \text{ und } b_{n+1} = c_{n+1}, \text{ falls } c_{n+1}^m > a.$$

Damit ist eine Intervallschachtelung mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein c , so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für jedes n .

Behauptung: $c^m = a$.

Der Beweis hierzu erfolgt indirekt.

Annahme: $c^m \neq a$.

Dann ist $c^m > a$ oder $c^m < a$. Wir betrachten den Fall $c^m > a$, den verbleibenden Fall beweist man völlig analog.

Wegen $c^m > a$ ist $d := c^m - a > 0$.
Es gilt

$$a_n^m \leq a \leq b_n^m \quad \text{und} \quad a_n^m \leq c^m \leq b_n^m.$$

Folglich ist

$$\underbrace{b_n^m}_{\geq c^m} - a_n^m \geq c^m + \underbrace{(-a_n^m)}_{\geq -a} \geq c^m - a = d.$$

Also

$$b_n^m - a_n^m \geq d > 0 \quad \text{für jedes } n.$$

Es sei jetzt $b_n - a_n = \delta_n$. Dann ist $a_n = b_n - \delta_n = b_n \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)$ und schließlich

$$b_n^m - a_n^m = b_n^m - b_n^m \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m := (\star).$$

Um diesen letzten Ausdruck weiter umformen zu können, benötigen wir noch einen wichtigen Hilfssatz.

Lemma. (*Bernoullische Ungleichung*)

2/2/8/2

Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ und ist m eine natürliche Zahl, dann gilt $(1 + a)^m \geq 1 + ma$.

Beweis. Den Beweis führt man leicht induktiv über m , er bleibt als Übungsaufgabe.

2/2/8/3

□

Korollar. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist $1 < a$, dann existiert eine natürliche Zahl m , so daß $b < a^m$.

2/2/8/4

Beweis. Der Beweis erfolgt ohne Schwierigkeiten mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung und des archimedischen Axioms. (Übungsaufgabe!)

2/2/8/5

□

Wir setzen jetzt den begonnenen Beweis des Satzes 2.3 fort.

2/2/8/6

Wegen $a_n > 0$ (denn $1 \leq a_n \leq b_n \leq a$) gilt

$$\delta_n = b_n - a_n < b_n \quad \text{und somit} \quad 0 < \frac{\delta_n}{b_n} < 1, \quad \text{also} \quad -1 < -\frac{\delta_n}{b_n}.$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung erhält man dann

$$\left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m \geq 1 - m \cdot \frac{\delta_n}{b_n} \implies$$

$$b_n^m \cdot \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m \geq b_n^m \cdot \left(1 - m \cdot \frac{\delta_n}{b_n}\right) = b_n^m - m \cdot b_n^{m-1} \cdot \delta_n.$$

Folglich ist

$$-b_n^m \cdot \left(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\right)^m \leq -b_n^m + m \cdot b_n^{m-1} \cdot \delta_n.$$

Wegen $\delta_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ (dies ist induktiv über n nachzuweisen) erhält man schließlich aus (\star) und der letzten Ungleichung

$$b_n^m - a_n^m \leq b_n^m - b_n^m + m \cdot \underbrace{b_n^{m-1}}_{\leq b_0^{m-1}} \cdot \delta_n \leq \underbrace{m \cdot b_0^{m-1} \cdot (b_0 - a_0)}_{:= d' > 0} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Damit haben wir $b_n^m - a_n^m \leq d' \cdot \frac{1}{2^n}$.

Wegen $n \leq 2^n$ (dies ist induktiv nachzuweisen) erhält man für $n \geq 1$: $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ und mit Hilfe des archimedischen Axioms schließlich $d' \cdot \frac{1}{2^n} \leq d' \cdot \frac{1}{n} < d$ für hinreichend große n .

Aus der Annahme $c^m \neq a$ hatten wir aber schon geschlossen, daß $b_n^m - a_n^m \geq d$ für alle n gilt. Dies führt zu einem Widerspruch. Folglich kann die Annahme nicht richtig gewesen sein. Also $c^m = a$. \square

Bemerkung. Damit ist die m -te Wurzel aus einer positiven reellen Zahl definiert, und diese Wurzel ist selbst positiv. 2/2/9

Definition. (*Potenzen mit rationalen Exponenten*) 2/2/10

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, und es sei $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \stackrel{\text{Df}}{=} \quad \sqrt[n]{a^m},$$

$$a^{-\frac{m}{n}} \quad \stackrel{\text{Df}}{=} \quad \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Satz 2.4 2/2/11

- (1) *Die rationalen und die reellen Zahlen sind dicht geordnet*
(d.h., zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere rationale Zahl, und zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine weitere reelle Zahl).
- (2) *Die Menge der rationalen Zahlen ist dicht in \mathbb{R}*
(d.h., zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl).
- (3) *Zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine irrationale Zahl.*

Beweis. (1). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann ist $a < \frac{a+b}{2} < b$ (nach Satz 2.2(12)). 2/2/12

Sind zusätzlich a und b rational, dann ist auch $\frac{a+b}{2}$ rational.

(2). Seien wieder $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Wir konstruieren eine rationale Zahl r mit der Eigenschaft $a < r < b$.

Wegen $0 < b - a$ existiert (nach Satz 2.2(11)) eine natürliche Zahl m , so daß

$$0 < \frac{1}{m} < b - a \quad \text{und damit} \quad a < a + \frac{1}{m} < b.$$

1. Fall: $0 < a$.

Nach dem archimedischen Axiom gibt es ein n , so daß $a < n \cdot \frac{1}{m}$.

Sei n_0 die kleinste natürliche Zahl mit $a < n_0 \cdot \frac{1}{m}$, also $a \geq (n_0 - 1) \cdot \frac{1}{m}$.

Wegen $a < a + \frac{1}{m} < b$ ist dann

$$a < n_0 \cdot \frac{1}{m} = \underbrace{(n_0 - 1) \cdot \frac{1}{m}}_{\leq a} + \frac{1}{m} \leq a + \frac{1}{m} < b.$$

$r = \frac{n_0}{m}$ leistet also das Verlangte.

2. Fall: $a = 0 < b$.

Nach Satz 2.2(11) existiert ein n mit $a = 0 < \frac{1}{n} < b$;

also $r = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ leistet das Verlangte.

3. Fall: $a < 0 < b$; trivial.

4. Fall: $a < 0 = b$, also $b = 0 < -a$.

Wie im 2. Fall existiert ein n , so daß $0 < \frac{1}{n} < -a$. Folglich ist $a < -\frac{1}{n} < 0 = b$.

5. Fall: $a < b < 0$, also $0 < -b < -a$.

Nach dem Fall 1 existiert eine rationale Zahl r , so daß $-b < r < -a$, folglich ist $a < -r < b$ und $-r \in \mathbb{Q}$.

(3). Es seien $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ und $r_1 < r_2$, also $r_2 - r_1 > 0$.

Nach dem archimedischen Axiom existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\sqrt{2} < n(r_2 - r_1)$.

Daraus folgt

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < r_2 - r_1 \quad \text{und} \quad r_1 < \frac{\sqrt{2}}{n} + r_1 < r_2.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $a := \frac{\sqrt{2}}{n} + r_1$ irrational ist.

Annahme: a ist rational.

Dann ist wegen $a - r_1 = \frac{\sqrt{2}}{n}$ auch $n(a - r_1) = \sqrt{2}$ rational. $\nexists!$ \square

Nach dem letzten Satz könnte man versucht sein anzunehmen, daß es genauso viele rationale wie reelle Zahlen gibt. Dies erweist sich aber als falsch. Ehe wir uns diesem Problem zuwenden, werden wir zunächst klären, was unter „gleich viele“ bzw. „gleichmächtig“ zu verstehen ist. 2/2/13

Definition. (*gleichmächtig*) 2/2/14

Zwei Mengen M und N sind *gleichmächtig* (**Bez.:** $M \sim N$)

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Bijektion zwischen M und N .

Wenn $M \sim \mathbb{N}$, dann heißt M auch *abzählbar* (*unendlich*). 2/2/15

Ist M unendlich aber nicht gleichmächtig mit der Menge der natürlichen Zahlen, dann heißt M *überabzählbar*.

Satz 2.5 2/2/16

- (1) *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar, d.h., es gibt genauso viele rationale wie natürliche Zahlen.*
(Die Menge der rationalen Zahlen kann also mit Hilfe der natürlichen Zahlen „durchnumeriert“ werden.)
- (2) *Die Menge der reellen Zahlen in dem Intervall $(0, 1)$ ist überabzählbar. Folglich ist auch die Menge \mathbb{R} überabzählbar.*
(Das Intervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ wird auch als *Kontinuum* bezeichnet.)

Beweis. (1). Der Beweis erfolgt mit dem *ersten Cantorschen Diagonalverfahren*. 2/2/17

Wir setzen hierbei voraus, daß man jede positive rationale Zahl als Bruch zweier positiver natürlicher Zahlen darstellen kann. Offenbar kommt jede positive rationale Zahl in dem folgenden unendlichen Schema wenigstens einmal (sogar unendlich oft) vor.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \dots \\
 \frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \dots \\
 \frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \dots \\
 \frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Entsprechend der Pfeilrichtungen (diagonal) werden alle Brüche aufgelistet:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \dots$$

Wir lassen jetzt alle die rationalen Zahlen weg, die in der Auflistung zuvor schon einmal aufgetreten sind; es sind dies $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \dots$. Damit entsteht eine neue Auflistung r_0, r_1, r_2, \dots , in der jede positive rationale Zahl genau einmal vorkommt. Folglich ist

$$\mathbb{Q} = \{0, -r_0, r_0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \dots\}.$$

Definiert man eine Abbildung f wie folgt:

$$f(0) := 0, \quad f(2n-1) := -r_{n-1} \quad \text{und} \quad f(2n) := r_{n-1} \quad \text{für jedes } n \geq 1,$$

dann ist f offenbar eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und \mathbb{Q} , und folglich ist \mathbb{Q} abzählbar.

(2). Der Beweis erfolgt mit dem *zweiten Cantorschen Diagonalverfahren*.

Angenommen, das Intervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ist abzählbar.

Wir setzen hierbei voraus, daß jede reelle Zahl aus $(0, 1)$ eine eindeutige Darstellung als unendlicher Dezimalbruch der Form $0, n_1 n_2 n_3 \dots$ besitzt, wobei $0 \leq n_i \leq 9$ ist und 9-Periode ausgeschlossen wird. Denn ist $a = 0, n_1 \dots n_k 999 \dots$ und $n_k < 9$, dann ist $a = 0, n_1 \dots n_{k-1} (n_k + 1) 000 \dots$ eine weitere Darstellung von a . Damit wäre die Eindeutigkeit der Darstellbarkeit verletzt.

Nach der obigen Annahme ist $(0, 1) \sim \mathbb{N}$. Folglich gibt es eine Aufzählung der reellen Zahlen in $(0, 1)$ (eindeutige Numerierung mit natürlichen Zahlen):

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, n_{11} n_{12} n_{13} \dots \\ a_1 &= 0, n_{21} n_{22} n_{23} \dots \\ a_2 &= 0, n_{31} n_{32} n_{33} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

wobei $0 \leq n_{ij} \leq 9$ und 9-Periode nicht auftritt. Nach Voraussetzung erscheint in dieser Aufzählung jede reelle Zahl aus $(0, 1)$ genau einmal.

Wir konstruieren jetzt ein $b \in (0, 1)$, das in dieser Aufzählung nicht vorkommt und erhalten somit einen Widerspruch.

Sei $b = 0, m_1 m_2 m_3 \dots$ mit $0 < m_i < 9$ und $m_i \neq n_{ii}$ für alle i . Dann ist insbesondere $0 < b < 1$, und b unterscheidet sich von jedem a_i wenigstens an der $(i+1)$ -ten Stelle. **⚡! □**

Absolutbetrag von reellen Zahlen

2/2/18

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

2/2/19

$$|a| \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Bez.: $|a|$ heißt *Betrag* oder *Absolutbetrag* von a , und $|a - b|$ heißt *Abstand* zwischen a und b .

Satz 2.6 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

2/2/20

- (1) $|a| \geq 0$, und $|a| = 0 \iff a = 0$.
- (2) $|a| = |-a|$. ($\implies |a - b| = |b - a|$.)
- (3) $-a \leq |a|$ und $a \leq |a|$. (\implies wenn $-a \leq |b|$ und $a \leq |b|$, so $|a| \leq |b|$.)
- (4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. ($\implies |a^n| = |a|^n$.)
- (5) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$.

Beweis. Die Eigenschaften lassen sich leicht auf die Definition zurückführen; ihr Beweis bleibt als Übung. \square

2/2/21

Satz 2.7 (Dreiecksungleichungen)

2/2/22

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- (2) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Beweis. (1). Nach Satz 2.6(3) gilt: $\pm a \leq |a|$ und $\pm b \leq |b|$.

2/2/23

1. Fall: $a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + |b|$.

2. Fall: $a + b < 0 \implies |a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$.

In jedem Fall ist also $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(2). Nach (1) gilt:

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog erhält man

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \implies \underbrace{|b| - |a|}_{-(|a| - |b|)} \leq |b - a| = |a - b|.$$

Also $\pm(|a| - |b|) \leq |a - b|$, und somit gilt

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad \square$$