

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

IV. \mathbb{R} genügt dem Intervallschachtelungsaxiom:

2/1/6

Es sei $([a_n, b_n])_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in \mathbb{R} , so daß für jede natürliche Zahl n gilt: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$, für jede natürliche Zahl n .

Anschauliche Deutung des Axioms: Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen“; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Satz 2.8

2/3/4

- (1) *Jede nicht leere und nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere Grenze.*
- (2) *Jede nicht leere und nach unten beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine untere Grenze.*
- (3) *Jede nicht leere und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere und eine untere Grenze.*

Bemerkung. Teil (1) des Satzes heißt: *Satz von der oberen Grenze*. Er hat grundlegende Bedeutung für die Analysis. (1) ist unter anderem auch äquivalent zum Intervallschachtelungsaxiom, d.h., man kann anstelle von Axiom IV für die reellen Zahlen auch den Satz von der oberen Grenze wählen.

2/3/5