

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Wir stellen jetzt einige grundlegende Eigenschaften von Mengen von reellen Zahlen zusammen. Hierbei nutzen wir ganz wesentlich die Ordnung von \mathbb{R} aus. 2/3/0

Definition. (*Schranke*) 2/3/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

- (1) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *obere Schranke* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad x \leq a \text{ für jedes } x \in M.$
- (2) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *untere Schranke* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad a \leq x \text{ für jedes } x \in M.$
- (3) M ist *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}} \quad M$ besitzt eine obere (bzw. untere) Schranke.
- (4) M ist *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}} \quad M$ ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Grenze*) 2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

- (1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad a$ ist die kleinste obere Schranke von M .
Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum von M*).
- (2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M
 $\overline{\text{Df}} \quad a$ ist die größte untere Schranke von M .
Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum von M*).

Diese Definition bedarf einer Rechtfertigung. Es muß nämlich nachgewiesen werden, daß eine kleinste obere bzw. größte untere Schranke überhaupt existiert. Dies erfolgt mit dem nachfolgenden Satz. 2/3/3

Satz 2.8 2/3/4

- (1) Jede nicht leere und nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere Grenze.
- (2) Jede nicht leere und nach unten beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine untere Grenze.
- (3) Jede nicht leere und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere und eine untere Grenze.

Bemerkung. Teil (1) des Satzes heißt: *Satz von der oberen Grenze*. Er hat grundlegende Bedeutung für die Analysis. (1) ist unter anderem auch quivalent zum Intervallschachtelungsaxiom, d.h., man kann anstelle von Axiom IV für die reellen Zahlen auch den Satz von der oberen Grenze wählen. 2/3/5

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$. 2/3/6

(1). Es sei $a \in M$ und b eine obere Schranke von M . Wenn M überhaupt eine obere Grenze besitzt, dann muß sie schon in dem Intervall $[a, b]$ liegen. Denn ist $c < a$, dann ist c keine obere Schranke von M und damit erst recht keine obere Grenze. Ist $b < c$, dann ist c nicht die kleinste obere Schranke von M . Wir brauchen also nur in dem Intervall $[a, b]$ nach einer oberen Grenze von M zu suchen, und dies geschieht mit Hilfe einer Intervallschachtelung.

Wir konstruieren eine Intervallfolge $([a_n, b_n])$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$,
- b_n ist eine obere Schranke von M ,
- für jedes n existiert ein $x \in M$ mit $a_n \leq x$,
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Wir starten mit

$$a_0 = a, \quad b_0 = b.$$

Es sei $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Für c_1 sind zwei Fälle möglich, nämlich:

- (a) c_1 ist eine obere Schranke von M oder
- (b) c_1 ist keine obere Schranke von M . Dann existiert ein $x \in M$, so daß $c_1 < x$.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$.

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_1, \quad \text{falls } c_1 \text{ eine obere Schranke von } M \text{ ist,}$$

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = b_0, \quad \text{falls } c_1 \text{ keine obere Schranke von } M \text{ ist.}$$

Damit gilt stets $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ und b_1 ist eine obere Schranke von M .

Weiterhin gibt es ein $x \in M$ mit $a_1 \leq x$, und schließlich ist $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$.

Bemerkung. Die Definition des Intervalls $[a_1, b_1]$ hätte man sich ersparen können, da $[a_1, b_1]$ als Spezialfall von $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ auftritt. Nur des besseren Verständnisses wegen ist dieser Fall hier diskutiert worden.

Seien nun (entsprechend der Induktionsvoraussetzung) a_n und b_n schon mit den geforderten Eigenschaften definiert.

Es sei $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Analog wie im ersten Schritt können für c_{n+1} wieder zwei Fälle eintreten:

- (a) c_{n+1} ist eine obere Schranke von M oder
- (b) c_{n+1} ist keine obere Schranke von M .

Entsprechend dieser Fälle definieren wir:

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } c_{n+1} \text{ eine obere Schranke von } M \text{ ist,}$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls } c_{n+1} \text{ keine obere Schranke von } M \text{ ist.}$$

Man überprüft leicht, daß $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung mit den gewünschten Eigenschaften ist.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung 1: c ist eine obere Schranke von M .

Es ist zu zeigen: Für jedes $x \in M$ gilt: $x \leq c$.

Annahme: c ist keine obere Schranke von M .

Dann existiert ein $x \in M$ mit $c < x$. Da b_n nach Definition eine obere Schranke von M ist, gilt: $a_n \leq c < x \leq b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Es ist $\underbrace{x - c}_{:= d} > 0$, und wegen $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ erhält man $b_n - a_n < d$ für hinreichend große n .

Dies liefert einen Widerspruch.

Behauptung 2: c ist die kleinste obere Schranke (also obere Grenze) von M .

Annahme: c ist nicht die kleinste obere Schranke von M .

Dann gibt es eine kleinere obere Schranke d von M , also $d < c$, und d ist ebenfalls eine obere Schranke von M .

Nach Voraussetzung existiert für a_n ein $x \in M$, so daß $a_n \leq x$. Wegen $x \leq d$ gilt insgesamt

$$a_n \leq x \leq d < c \leq b_n.$$

Analog wie beim Beweis von Behauptung 1 erhält man einen Widerspruch.

Folglich ist c obere Grenze von M .

(2) bleibt als Übungsaufgabe.

Hinweis: Sei $M \neq \emptyset$ und M nach unten beschränkt.

Man bilde $M^- = \{-x : x \in M\}$.

g.z.z.: M ist nach unten beschränkt gdw M^- nach oben beschränkt ist, und

c ist obere Grenze von M^- gdw $-c$ untere Grenze von M ist.

Es läßt sich auch zeigen, daß die Eigenschaften (1) und (2) äquivalent sind.

(3). Zusammenfassung von (1) und (2). \square

Bemerkung. Wir haben gezeigt, daß unter Benutzung der Axiome I – IV der Satz von der oberen Grenze gilt. 2/3/7

Man kann auch umgekehrt unter Benutzung der Axiome I – III und des Satzes von der oberen Grenze zeigen, daß das Intervallschachtelungsaxiom gilt, d.h., unter Zugrundelegung der Axiome I – III sind das Intervallschachtelungsaxiom und der Satz von der oberen Grenze äquivalent.

Wir geben jetzt einen Beweis hierfür an.

Mit Hilfe des Intervallschachtelungsaxioms wurde bereits der Satz von der oberen Grenze bewiesen. Es bleibt noch zu zeigen, daß auch das Intervallschachtelungsaxiom aus diesem Satz folgt.

Dazu sei $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung und $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ und durch jedes b_n nach oben beschränkt. Folglich besitzt M eine obere Grenze c , und somit ist stets $a_n \leq c$.

Es bleibt zu zeigen: $c \leq b_n$ für alle n .

Angenommen, es gibt ein k , so daß $b_k < c$.

Nach den obigen Betrachtungen ist b_k eine obere Schranke von M , die kleiner als c ist. Folglich ist c nicht obere Grenze von M . $\nexists!$ \square

Definition. (*Maximum, Minimum*) 2/3/8

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) M besitzt ein *Maximum*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in M$, so daß $x \leq a$ für jedes $x \in M$.

Bez.: $a = \max M$ (a heißt Maximum von M).

(2) M besitzt ein *Minimum*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in M$, so daß $a \leq x$ für jedes $x \in M$.

Bez.: $a = \min M$ (a heißt Minimum von M).

Folgerung. 2/3/9

(1) Besitzt M ein Maximum (bzw. Minimum), so ist

$\max M = \sup M$ (bzw. $\min M = \inf M$).

(2) Gehören $\sup M$ (bzw. $\inf M$) zu M , dann gilt stets

$\max M = \sup M$ (bzw. $\min M = \inf M$).

Definition. (*Umgebung*) 2/3/10

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(1) U heißt ε -Umgebung von a

$\overline{\text{Df}}$ $U = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\},$
(d.h., $U = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$).

Bez.: $U = U_\varepsilon(a).$

(2) U ist eine *Umgebung* von a

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Bez.: $U(a).$

Definition. (*Häufungspunkt*)

2/3/11

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein Häufungspunkt von M

$\overline{\text{Df}}$ In jeder ε -Umgebung von a liegt wenigstens ein von a verschiedenes Element
(=: Punkt) aus M ,
(d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x \neq a$ und $x \in U_\varepsilon(a)$).

Satz 2.9 Ist a ein Häufungspunkt von M , dann liegen in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Elemente aus M . 2/3/12

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von M und $\varepsilon > 0$.

2/3/13

Annahme: In $U_\varepsilon(a)$ gibt es nur endlich viele Elemente $b \in M$ mit $b \neq a$; es seien dies b_1, \dots, b_n .

Wegen $b_i \neq a$, $i = 1, \dots, n$, ist $|b_i - a| > 0$.

Sei $\varepsilon' := \min\{|b_1 - a|, \dots, |b_n - a|\} > 0$.

Nach Definition des Häufungspunktes existiert ein $b \in M$, so daß $b \neq a$ und $b \in U_{\varepsilon'}(a)$; also $|b - a| < \varepsilon'$.

Wegen $b_i \in U_\varepsilon(a)$ ist $|b_i - a| < \varepsilon$ und damit $\varepsilon' \leq |b_i - a| < \varepsilon$. Folglich ist $U_{\varepsilon'}(a) \subseteq U_\varepsilon(a)$ und somit $b \in U_\varepsilon(a)$, also $b \in \{b_1, \dots, b_n\}$.

Sei $b = b_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$|b - a| = |b_i - a| < \varepsilon' \leq |b_i - a|. \quad \text{!}$$

Folglich ist unsere Annahme falsch. \square

Satz 2.10 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und M' die Menge aller Häufungspunkte von M . Ist a ein Häufungspunkt von M' , dann ist a schon ein Häufungspunkt von M . 2/3/14

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von M' und $\varepsilon > 0$.

2/3/15

z.z.: In $U_\varepsilon(a)$ gibt es ein $c \in M$ mit $c \neq a$.

Da a ein Häufungspunkt von M' ist, existiert ein $b \in M$, so daß $b \neq a$ und $b \in U_\varepsilon(a)$. Folglich ist b ein Häufungspunkt von M . Dann existieren in jeder δ -Umgebung von a (mit $\delta > 0$) unendlich viele Elemente aus M . Insbesondere gibt es dann ein $c \in M$ mit $c \neq a$ und $c \in U_\delta(b)$.

Insgesamt haben wir: $b \in U_\varepsilon(a) \implies |a - b| < \varepsilon$ und
 $c \in U_\delta(b) \implies |b - c| < \delta$.

Wir wählen speziell $\delta = \varepsilon - |a - b| > 0$, also $|a - b| + \delta = \varepsilon$. Folglich gilt

$$|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + \underbrace{|b - c|}_{< \delta} < |a - b| + \delta = \varepsilon.$$

Also $c \in U_\varepsilon(a)$, $c \neq a$ und $c \in M$. \square

Satz 2.11 (*Satz von Bolzano-Weierstraß*)

2/3/16

Jede unendliche und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt (wenigstens) einen Häufungspunkt.

Beweis. (Beweis mit Intervallschachtelung!)

2/3/17

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, M unendlich und beschränkt. Dann existieren Elemente $a, b \in \mathbb{R}$, so daß $a \leq x \leq b$ für jedes $x \in M$.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ mit folgenden Eigenschaften:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$,
- in jedem $[a_n, b_n]$ liegen unendlich viele Elemente aus M ,
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Sei $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Dann ist $M \subseteq [a_0, b_0]$ und $[a_0, b_0] \cap M$ unendlich.

Sei $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Dann ist $[a_0, b_0] = [a_0, c_1] \cup [c_1, b_0]$.

Da $[a_0, b_0]$ unendlich viele Elemente aus M enthält, muß dies auch für $[a_0, c_1]$ oder für $[c_1, b_0]$ gelten.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir:

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_1, \quad \text{falls } [a_0, c_1] \cap M \text{ unendlich ist und}$$

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = b_0, \quad \text{anderenfalls } (\implies [c_1, b_0] \cap M \text{ unendlich}).$$

In jedem Falle ist $[a_1, b_1] \cap M$ unendlich, und weiterhin gilt $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$ und $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$.

Seien a_n, b_n schon (entsprechend der Induktionsvoraussetzung) mit den geforderten Eigenschaften definiert.

Sei $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Da $[a_n, b_n] = [a_n, c_{n+1}] \cup [c_{n+1}, b_n]$ und $[a_n, b_n] \cap M$ unendlich ist, gilt:

$[a_n, c_{n+1}] \cap M$ ist unendlich oder $[c_{n+1}, b_n] \cap M$ ist unendlich. Entsprechend dieser Fallunterscheidung definiert man:

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } [a_n, c_{n+1}] \cap M \text{ unendlich ist und}$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{sonst.}$$

Offensichtlich besitzt $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ die geforderten Eigenschaften.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n .

Behauptung: c ist ein Häufungspunkt von M .

z.z.: Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $x \in M$ mit $x \neq c$ und $x \in U_\varepsilon(c)$.

Wählt man n so groß, daß $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) < \varepsilon$, dann ist wegen $a_n \leq c \leq b_n$ auch $c - a_n, b_n - c < \varepsilon$ und damit $c - \varepsilon < a_n, b_n < c + \varepsilon$. Schließlich gilt:

$$[a_n, b_n] \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon) = U_\varepsilon(c).$$

Da $[a_n, b_n]$ unendlich viele Elemente aus M enthält, liegen auch unendlich viele Elemente aus M in $U_\varepsilon(c)$. Folglich ist c ein Häufungspunkt von M . \square