

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (Schranke)

2/3/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *obere Schranke* von M

$\overline{\text{Df}}$ $x \leq a$ für jedes $x \in M$.

(2) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *untere Schranke* von M

$\overline{\text{Df}}$ $a \leq x$ für jedes $x \in M$.

(3) M ist *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ M besitzt eine obere (bzw. untere) Schranke.

(4) M ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ M ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Grenze*)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M

$\overline{\text{Df}}$ a ist die kleinste obere Schranke von M .

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum von M*).

(2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M

$\overline{\text{Df}}$ a ist die größte untere Schranke von M .

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum von M*).

Übungsaufgaben

14. Zeigen Sie, daß die Menge $M = \{n \cdot a^n : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq 1\}$ beschränkt ist, falls $0 < a < 1$.

2/4/14

Berechnen Sie $\inf M$.