

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Definition. (Grenze)

2/3/2

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

- (1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M
 $\overline{\text{Df}}$ a ist die kleinste obere Schranke von M .

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum von M*).

- (2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M
 $\overline{\text{Df}}$ a ist die größte untere Schranke von M .

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum von M*).

Definition. (*Maximum, Minimum*)

2/3/8

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

- (1) M besitzt ein *Maximum*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in M$, so daß $x \leq a$ für jedes $x \in M$.

Bez.: $a = \max M$ (a heißt Maximum von M).

- (2) M besitzt ein *Minimum*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in M$, so daß $a \leq x$ für jedes $x \in M$.

Bez.: $a = \min M$ (a heißt Minimum von M).

Übungsaufgaben

15. Zu folgenden Mengen gebe man (im Falle der Existenz) Minimum, Maximum, Infimum und Supremum an!

2/4/15

(a) $M = \{x : \sin x = 0\}$,

(b) $M = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 < \cos 0\}$,

(c) $M = \{y : \text{es gibt ein } x \text{ mit } \cos x < y\}$,

(d) $M = \{x : x^2 + 10x + 24 \leq 0\}$,

(e) $M = \{y : \text{es gibt ein } x \text{ mit } (x, y) \in A\}$, wobei
 $A = \{(x, y) : x > -1 \text{ und } y > 2x\}$.