

# Kapitel 1

## Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

### Durchschnitt und Vereinigung von Mengen

1/0/4

$$M \cap N \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}. \quad (\text{Durchschnitt; vgl. Abb. 1.1})$$

$$M \cup N \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}. \quad (\text{Vereinigung; vgl. Abb. 1.2})$$

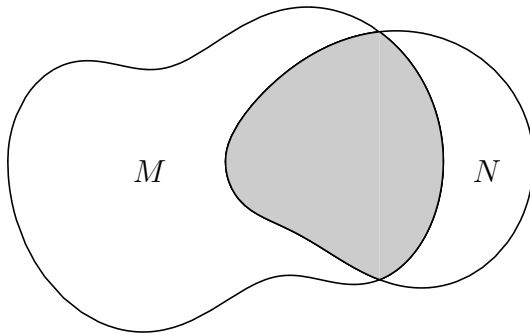


Abb. 1.1 Die schattierte Fläche symbolisiert den Durchschnitt der Mengen.

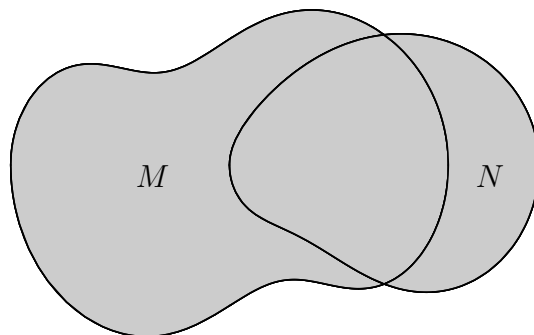


Abb. 1.2 Die schattierte Fläche symbolisiert die Vereinigung der Mengen.

### Differenz und Komplement von Mengen

1/0/5

$$M \setminus N \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}. \quad (\text{Mengendifferenz; vgl. Abb. 1.3})$$

Ist eine Bezugsmenge  $M$  gegeben, z.B.  $M = \mathbb{R}$ , dann läßt sich auch das Komplement einer Teilmenge  $N$  von  $M$  bilden:

$$C(N) \stackrel{\text{Df}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}. \quad (\text{Komplement bez. } M; \text{ vgl. Abb. 1.4})$$

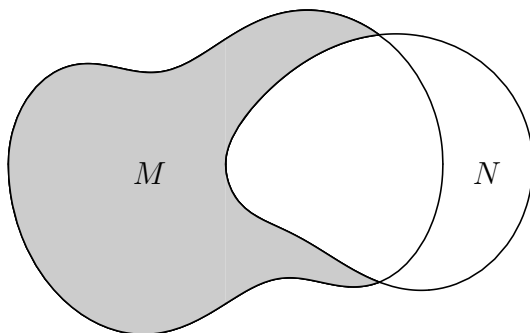


Abb. 1.3 Die schattierte Fläche symbolisiert die Differenz der Mengen.

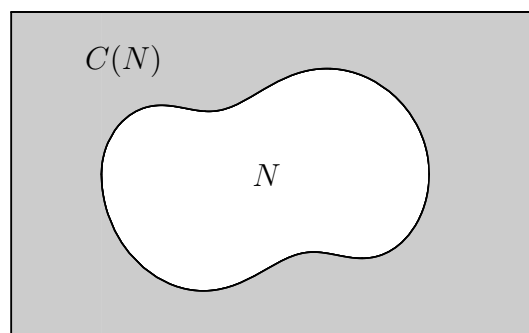


Abb. 1.4 Die schattierte Fläche symbolisiert das Komplement von  $N$  bez.  $M$ .

## Kapitel 2

# Reelle Zahlen

## 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

(0)  $0 < 1$ .

(1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)

(2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)

(3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)

**Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.

(3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)

(4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)

(5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,

Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .

(6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .

Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .

(7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .

(8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,

Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,

Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .

(9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,

Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .

(10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,

Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,

Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .

(11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .

(12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

**Definition.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2/2/19

$$|a| \stackrel{\text{Df}}{=} \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

**Bez.:**  $|a|$  heißt *Betrag* oder *Absolutbetrag* von  $a$ , und  
 $|a - b|$  heißt *Abstand* zwischen  $a$  und  $b$ .

## Übungsaufgaben

9. Bilden Sie  $M \cap N$ ,  $M \cup N$ ,  $M \setminus N$ ,  $N \setminus M$  für die folgenden Mengen von reellen Zahlen:

2/4/9

$$M = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| > |2x + 3|\},$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 3| < |4x - 7|\}.$$