

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

I. \mathbb{R} ist ein Körper (d.h., in \mathbb{R} gelten folgende 10 Eigenschaften:)

2/1/1

- (1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (2) $x + y = y + x$,
- (3) Es existiert ein Element 0 in \mathbb{R} , so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x + 0 = x$.

Bemerkung. Aus (2) und (3) folgt sofort, daß es genau ein solches Element 0 in \mathbb{R} gibt. Denn sind $0_1, 0_2$ Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

- (4) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so daß $x + y = 0$.

Bemerkung. Aus (1) – (4) folgt, daß es für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $x + y = 0$. Wir zeigen, daß y durch x tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Dazu sei x gegeben.

Angenommen, es gibt Elemente y, z , so daß $x + y = 0$ und $x + z = 0$. Dann gilt:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z.$$

Dieses durch x eindeutig bestimmte y wird mit $y := -x$ bezeichnet.

Die Eigenschaften (1) – (4) sind die Axiome für eine (*additive*) *abelsche Gruppe*.

- (5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- (6) $x \cdot y = y \cdot x$,
- (7) Es existiert ein Element 1 in \mathbb{R} , so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \cdot 1 = x$.

Bemerkung. Analog wie bei (3) gibt es genau ein solches Element 1 . Denn wären $1_1, 1_2$ Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

- (8) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 1$.

Bemerkung. Analog wie zu (4) zeigt man, daß y durch x eindeutig bestimmt ist; der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Dieses durch x eindeutig bestimmte y wird mit $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$ bezeichnet.

- (9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Bemerkung. Aus den obigen Axiomen erhält man: $x \cdot 0 = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Es ist $x = x \cdot 1 = x \cdot (\underbrace{1 + 0}_{=x}) = x + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$. Nach den Axiomen (2) und (3) gibt es genau ein Element 0 , so daß $x = x + 0$. Da auch $x = x + x \cdot 0$ ist, muß dann $x \cdot 0$ dieses Element 0 sein.

- (10) $0 \neq 1$.

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Wir verabreden zunächst folgende Bezeichnungen:

2/2/0

Das durch $a \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Element $-a$ heißt *invers* zu a .

Falls $a \neq 0$, dann heißt $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *reziprok* (oder *invers* bez. der Multiplikation) zu a .

$a - b$ und $\frac{a}{b}$ dienen als Abkürzungen für $a + (-b)$ bzw. für $a \cdot \frac{1}{b}$.

Daraus ergibt sich sofort: $0 - b = 0 + (-b) = (-b) + 0 = -b$.

Definition. (*Potenz*) (induktive Definition)

2/2/5

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

$$a^0 \stackrel{\text{Df}}{=} 1,$$

$$a^{n+1} \stackrel{\text{Df}}{=} a^n \cdot a.$$

Satz 2.3 Ist $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$, dann gibt es genau ein $b > 0$, so daß $b^m = a$.

2/2/7

$$\text{Bez.: } b = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}; \quad (m\text{-te Wurzel aus } a)$$

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 2

- Definitionen: inverses Element, reziprokes Element, Potenz, Wurzel;

2/5/3