

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Definition. (*Häufungspunkt einer Folge*)

3/1/16

Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein *Häufungspunkt* (oder *Verdichtungspunkt*) von (a_n)

$\overline{\text{Df}}$ In jeder ε -Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder a_n
 (die untereinander auch gleich sein dürfen, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0
 gibt es ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$).

Satz 3.6 Ist a ein Häufungspunkt der Folge (a_n) , dann existiert eine Teilfolge von (a_n) , die gegen a konvergiert. 3/1/23

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von (a_n) .

3/1/24

Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0 existiert ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$.

Für $n = 1, 2, 3, \dots$ wählen wir $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

Damit erhält man:

für $\varepsilon_1 = 1$ und $n_0 = 1$ gibt es ein $n_1 \geq n_0$, so daß $|a_{n_1} - a| < \varepsilon_1 = 1$;

für $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ und $n_0 = n_1 + 1$ gibt es ein $n_2 \geq n_0$, so daß $|a_{n_2} - a| < \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$;

für $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ und $n_0 = n_2 + 1$ gibt es ein $n_3 \geq n_0$, so daß $|a_{n_3} - a| < \varepsilon_3 = \frac{1}{3}$;

$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$

Wegen $n_0 := 0 < n_1 < n_2 < \dots$ ist (a_{n_i}) eine Teilfolge von (a_n) , und (a_{n_i}) konvergiert offenbar gegen a . \square