

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Satz 2.8

2/3/4

- (1) Jede nicht leere und nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere Grenze.
- (2) Jede nicht leere und nach unten beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine untere Grenze.
- (3) Jede nicht leere und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere und eine untere Grenze.

Satz 2.10 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und M' die Menge aller Häufungspunkte von M .
Ist a ein Häufungspunkt von M' , dann ist a schon ein Häufungspunkt von M .

2/3/14

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (Beschränktheit bei Folgen)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

- (1) (a_n) ist nach oben (bzw. nach unten) beschränkt
 $\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .
- (2) (a_n) ist beschränkt
 $\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (Limes superior, Limes inferior)

3/1/27

Es sei (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte (oder *Limites* von konvergenten Teilfolgen) von (a_n) .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \left(:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \quad \overline{\text{Df}} \quad \sup H(a_n).$$

$\sup H(a_n)$ heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von (a_n) [= größter Häufungspunkt in $H(a_n)$].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \left(:= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \quad \overline{\text{Df}} \quad \inf H(a_n), .$$

$\inf H(a_n)$ heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von (a_n) [= kleinster Häufungspunkt in $H(a_n)$].

Bemerkung. Die Definition ist korrekt, denn

- (1) $H(a_n) \neq \emptyset$, da (a_n) beschränkt ist.
- (2) $H(a_n)$ ist beschränkt, denn (a_n) ist beschränkt; folglich existieren $\sup H(a_n)$ und $\inf H(a_n)$.
- (3) Mit Satz 2.10 läßt sich zeigen, daß $\sup H(a_n) = \max H(a_n)$ und $\inf H(a_n) = \min H(a_n)$.
(Übungsaufgabe!)