

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(a_n) ist *konvergent gegen* a

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

In diesem Falle heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) .

Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder auch einfach
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $a_n \rightarrow a$.

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

(1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .

(2) (a_n) ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Häufungspunkt einer Folge*)

3/1/16

Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein *Häufungspunkt* (oder *Verdichtungspunkt*) von (a_n)

$\overline{\text{Df}}$ In jeder ε -Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder a_n
 (die untereinander auch gleich sein dürfen, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0
 gibt es ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$).

Definition. (*Limes superior, Limes inferior*)

3/1/27

Es sei (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte (oder *Limites* von konvergenten Teilfolgen) von (a_n) .

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \left(:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \quad \overline{\text{Df}} \quad \sup H(a_n)$.

$\sup H(a_n)$ heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von (a_n) [:= größter Häufungspunkt in $H(a_n)$].

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \left(:= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \quad \overline{\text{Df}} \quad \inf H(a_n)$.

$\inf H(a_n)$ heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von (a_n) [:= kleinster Häufungspunkt in $H(a_n)$].

Satz 3.7 Für beschränkte Folgen (a_n) sind die Bedingungen (1) – (3) äquivalent: 3/1/29

- (1) (a_n) ist konvergent.
- (2) (a_n) besitzt genau einen Häufungspunkt.
- (3) $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.