

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.** (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

(1)  $(a_n)$  ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c$  (bzw.  $c \leq a_n$ ) für jedes  $n$ .

(2)  $(a_n)$  ist *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nach oben und nach unten beschränkt.

**Satz 3.4** Jede beschränkte Folge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

3/1/17

**Satz 3.6** Ist  $a$  ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ , dann existiert eine Teilfolge von  $(a_n)$ , die gegen  $a$  konvergiert.

3/1/23

**Definition.** (*Limes superior, Limes inferior*)

3/1/27

Es sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge von reellen Zahlen und  $H(a_n)$  die Menge aller Häufungspunkte (oder *Limites* von konvergenten Teilfolgen) von  $(a_n)$ .

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \left( := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \overline{\text{Df}} \sup H(a_n).$

$\sup H(a_n)$  heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von  $(a_n)$   $[:=$  größter Häufungspunkt in  $H(a_n)$ ].

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \left( := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \overline{\text{Df}} \inf H(a_n), .$

$\inf H(a_n)$  heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von  $(a_n)$   $[:=$  kleinster Häufungspunkt in  $H(a_n)$ ].

**Satz 3.7** Für beschränkte Folgen  $(a_n)$  sind die Bedingungen (1) – (3) äquivalent:

3/1/29

(1)  $(a_n)$  ist konvergent.

(2)  $(a_n)$  besitzt genau einen Häufungspunkt.

(3)  $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$ .

**Beweis.** Übungsaufgabe!  $\square$

3/1/30