

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition.

3/1/2

- (1) (a_n) konvergiert (oder ist konvergent) in \mathbb{R}
 $\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß (a_n) gegen a konvergiert.
- (2) (a_n) divergiert (oder ist divergent) in \mathbb{R}
 $\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nicht konvergent in \mathbb{R} .

Beispiele.

2. Sei $(a_n) = \left(\frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3} \right)$.

3/1/4/2

Behauptung: $a_n \rightarrow 2$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left| \frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| \\ &= \left| \frac{-4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| = \frac{4n + 6}{n^2 + 2n + 3} \\ &= \underbrace{\frac{4n}{n^2 + 2n + 3}}_{\leq \frac{4n}{n^2}} + \underbrace{\frac{6}{n^2 + 2n + 3}}_{\leq \frac{6}{2n}} \\ &\leq \frac{4}{n} + \frac{3}{n} = \frac{7}{n}. \end{aligned}$$

Ist $n_0 > \frac{7}{\varepsilon}$, dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - 2| \leq \frac{7}{n} \leq \frac{7}{n_0} < \varepsilon.$$