

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

#### Definition.

3/1/2

- (1)  $(a_n)$  konvergiert (oder ist konvergent) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert.
- (2)  $(a_n)$  divergiert (oder ist divergent) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nicht konvergent in  $\mathbb{R}$ .

#### Beispiel. (Definition der Eulerschen Zahl $e$ )

3/1/35

Sei  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Behauptung:  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist  $(a_n)$  nach Satz 3.8 konvergent.)

- z.z.: 1.  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$  und  
 2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  (denn alle  $a_n$  sind positiv).

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\ &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1 &\iff (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)(n^2 + 2n + 1) \\ &\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$ , und damit ist  $(a_n)$  streng monoton wachsend.

Zu 2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Offenbar ist  $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$  für jedes  $n$ .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge  $(b_n)$  streng monoton fällt.

g.z.z.:  $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$  (denn alle  $b_n$  sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für  $(a_n)$ , er wird als Übungsaufgabe gestellt.

Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \text{ für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist  $(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und  $(b_n)$  monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen  $e$  und  $e'$ , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung:  $e = e'$ .

Annahme:  $e \neq e'$ .

Dann ist  $\varepsilon := |e - e'| > 0$ , und folglich gilt für hinreichend große  $n$

$$\begin{aligned} |e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } \frac{12}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\varepsilon = |e - e'| < \varepsilon$  ~~!~~

Also  $e = e'$ .

Da Cauchyfolgen in  $\mathbb{R}$  konvergieren, nennt man  $\mathbb{R}$  auch *vollständig* (bez. der Konvergenz von Cauchyfolgen).

3/1/42
--------

In diesem Sinne ist  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig, denn  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ist z.B. eine Cauchyfolge in  $\mathbb{Q}$ , aber sie ist in  $\mathbb{Q}$  nicht konvergent.

Wir betrachten jetzt wieder Folgen in  $\mathbb{R}$ .