

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

- (0) $0 < 1$.
- (1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)
- (2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)
- (3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)
- (4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.
- (6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.
- (7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.
- (8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.
- (9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.
- (10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,
Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,
Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- (11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.
- (12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Satz 2.7 (Dreiecksungleichungen)

2/2/22

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- (2) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition.

3/1/2

- (1) (a_n) konvergiert (oder ist konvergent) in \mathbb{R}
 $\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so daß (a_n) gegen a konvergiert.
- (2) (a_n) divergiert (oder ist divergent) in \mathbb{R}
 $\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nicht konvergent in \mathbb{R} .

Satz 3.3 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3/1/14

Satz 3.10 (Eigenschaften konvergenter Folgen)

3/1/43

Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent und
$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent
und
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$
- (5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- (6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$
bzw. $d \leq \lim b_n$.

Beweis. Es sei $\lim a_n = a, \lim b_n = b$ und sei $\varepsilon > 0$.

3/1/44/1

(1). Es ist $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| := (\star)$.

1. Fall: $c = 0$. $\implies (\star) < \varepsilon$ für jedes $n \geq 0$.

2. Fall: $c \neq 0$. $\implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ für fast alle n .

Damit erhält man

$$|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \text{für fast alle } n.$$

In jedem Fall ist also

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot a = c \cdot \lim a_n.$$

(2). Nach Voraussetzung gilt: $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.

Folglich existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus erhält man

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$.

Also

$$\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n.$$

(3). Es soll $|a_n \cdot b_n - a \cdot b|$ durch ε „abgeschätzt“ werden, und zwar für fast alle n . Es ist bekannt, daß $|a_n - a|$, $|b_n - b|$ „klein“ werden für hinreichend große n . Wir beginnen zu rechnen und versuchen ein n_0 so zu finden, daß die Abschätzung gelingt.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= \underbrace{|a_n|}_{?} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\text{klein}} + |b| \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{\text{klein}} := (\star\star) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist (a_n) konvergent, also auch beschränkt durch ein $c > 0$, d.h., $|a_n| \leq c$.

Daraus ergibt sich

$$|a_n| \cdot |b_n - b| \leq c \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Dies gilt aber nach (1) für hinreichend große n .

Analog gilt auch $|b| \cdot |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für große n .

Damit erhält man insgesamt $(\star\star) < \varepsilon$.

(4). Um diese Behauptung beweisen zu können, benötigen wir zunächst ein