

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Beweis. Es sei $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ und sei $\varepsilon > 0$.

3/1/44/1

(1). Es ist $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| := (\star)$.

1. Fall: $c = 0$. $\implies (\star) < \varepsilon$ für jedes $n \geq 0$.

2. Fall: $c \neq 0$. $\implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ für fast alle n .

Damit erhält man

$$|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \text{für fast alle } n.$$

In jedem Fall ist also

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot a = c \cdot \lim a_n.$$

(2). Nach Voraussetzung gilt: $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.

Folglich existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus erhält man

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$.

Also

$$\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n.$$

(3). Es soll $|a_n \cdot b_n - a \cdot b|$ durch ε „abgeschätzt“ werden, und zwar für fast alle n .

Es ist bekannt, daß $|a_n - a|$, $|b_n - b|$ „klein“ werden für hinreichend große n . Wir beginnen zu rechnen und versuchen ein n_0 so zu finden, daß die Abschätzung gelingt.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= \underbrace{|a_n|}_{?} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\text{klein}} + |b| \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{\text{klein}} := (\star\star) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist (a_n) konvergent, also auch beschränkt durch ein $c > 0$, d.h., $|a_n| \leq c$.

Daraus ergibt sich

$$|a_n| \cdot |b_n - b| \leq c \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Dies gilt aber nach (1) für hinreichend große n .

Analog gilt auch $|b| \cdot |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für große n .

Damit erhält man insgesamt $(\star\star) < \varepsilon$.

(4). Um diese Behauptung beweisen zu können, benötigen wir zunächst ein

Lemma. Wenn $\lim b_n = b \neq 0$, dann existiert ein m_0 , so daß für jedes $n \geq m_0$ gilt: 3/1/44/2
 $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$.

Beweis. Sei $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Wegen $b_n \rightarrow b$ gibt es ein m_0 , so daß für jedes $n \geq m_0$ gilt: 3/1/44/3
 $|b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$.

Weiterhin gilt:

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$-\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$\frac{|b|}{2} < |b_n| < \frac{3}{2} \cdot |b| \implies$$

$$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}. \quad \square$$

Beweis zu (4). Es ist

3/1/44/4

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| \\ &= \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\leq \frac{2}{|b|}} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| := (\star\star\star). \end{aligned}$$

Wegen $b_n \rightarrow b$ existiert für $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |b|^2. \implies (\star\star\star) < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Also $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b_n}$.

(4'). Wegen $b_n \neq 0$, $b_n \rightarrow b$ und $b \neq 0$ gilt $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$. Da auch $a_n \rightarrow a$ erhält man mit (3)

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \implies$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

(5). Es ist $\left| |a_n| - |a| \right| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ für hinreichend große n . $\implies |a_n| \rightarrow |a|$.
Also $\lim |a_n| = |a| = \left| \lim a_n \right|$.

(6). Sei $c_n := b_n - a_n$ (≥ 0).

g.z.z.: $\lim c_n \geq 0$.

Denn dann gilt ja

$$0 \leq \lim c_n = \lim(b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n \implies$$

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Annahme: $\lim c_n := c < 0$.

Sei $\varepsilon = \frac{|c|}{2} = -\frac{c}{2}$. Dann liegen in $U_\varepsilon(c)$ fast alle c_n . \implies

$$c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon, \text{ also } c - \left(-\frac{c}{2}\right) < c_n < c + \left(-\frac{c}{2}\right) \implies$$

$$\frac{3}{2} \cdot c < c_n < \frac{c}{2} < 0 \quad \text{!}$$

Ist speziell $a_n \leq d$, so ist $\lim a_n \leq \lim d = d$ (d als konstante Folge betrachtet).

Analoges gilt für $d \leq b_n$. \square