

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.** (*Konvergenz*)

3/1/0

Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $a \in \mathbb{R}$ .

$(a_n)$  ist *konvergent gegen*  $a$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

In diesem Falle heißt  $a$  *Grenzwert* oder *Limes* von  $(a_n)$ .

**Bez.:**  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $a = \lim a_n$  oder auch einfach  
 $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$  oder  $a_n \rightarrow a$ .

Um den Konvergenzbegriff möglichst anschaulich zu formulieren, sagen wir auch:

3/1/1

In jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen *fast alle* Folgenglieder  $a_n$ . „Fast alle“ bedeutet „alle, mit Ausnahme höchstens endlich vieler“.

**Definition.**

3/1/2

(1)  $(a_n)$  *konvergiert* (oder ist *konvergent*) in  $\mathbb{R}$

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert.

(2)  $(a_n)$  *divergiert* (oder ist *divergent*) in  $\mathbb{R}$

$\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nicht konvergent in  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung.** Im folgenden bedeutet „Konvergenz“ – wenn nichts anderes vereinbart wird – immer „Konvergenz“ in  $\mathbb{R}$ .

3/1/3

**Beispiele.**

1. Sei  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ .

3/1/4/1

Behauptung:  $(a_n)$  konvergiert gegen 0.

Beweis. z.z.: Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Satz 2.2(11) existiert ein  $n_0$ , so daß  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0$  ist dann

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \quad \text{Also } \lim \frac{1}{n} = 0.$$

2. Sei  $(a_n) = \left(\frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3}\right)$ .

3/1/4/2

Behauptung:  $a_n \rightarrow 2$ .

Beweis. Sei  $\varepsilon > 0$ . Es ist

$$\begin{aligned}
 |a_n - 2| &= \left| \frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| \\
 &= \left| \frac{-4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| = \frac{4n + 6}{n^2 + 2n + 3} \\
 &= \underbrace{\frac{4n}{n^2 + 2n + 3}}_{\leq \frac{4n}{n^2}} + \underbrace{\frac{6}{n^2 + 2n + 3}}_{\leq \frac{6}{2n}} \\
 &\leq \frac{4}{n} + \frac{3}{n} = \frac{7}{n}.
 \end{aligned}$$

Ist  $n_0 > \frac{7}{\varepsilon}$ , dann gilt für alle  $n \geq n_0$ :

$$|a_n - 2| \leq \frac{7}{n} \leq \frac{7}{n_0} < \varepsilon.$$

3. Sei  $(a_n) = ((-1)^n)$ .

3/1/4/3

Behauptung:  $(a_n)$  ist divergent (in  $\mathbb{R}$ ).

Annahme:  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ .

Nach Definition der Konvergenz erhält man: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Dies gilt insbesondere für  $\varepsilon = 1$ .

Für  $a$  sind zwei Fälle möglich:  $a \geq 0$  oder  $a < 0$ .

Fall 1.  $a \geq 0$ .

Ist  $n$  ungerade, dann ist  $a_n = -1$ . Folglich ist

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| = |-1 - a| = |1 + a| \geq 1, \quad \text{!}$$

Fall 2.  $a < 0$ .

Ist  $n$  gerade, dann ist  $a_n = 1$  und damit gilt

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| = |1 + \underbrace{(-a)}_{>0}| > 1, \quad \text{!}$$

Folglich ist  $(a_n)$  nicht konvergent.

**Satz 3.1** Eine Folge  $(a_n)$  hat höchstens einen Grenzwert

3/1/5

(d.h.,  $(a_n)$  konvergiert gegen höchstens eine Zahl).

**Beweis.** Angenommen,  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$  und  $a \neq b$ .

3/1/6

Dann ist  $|a - b| > 0$ .

Nach Definition der Konvergenz gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  :  $|a_n - a| < \varepsilon$ , und es existiert ein  $m_0$ , so daß für jedes  $n \geq m_0$  :  $|a_n - b| < \varepsilon$ .

Das gilt speziell für  $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$ .

Ist  $k = \max\{n_0, m_0\}$ , dann gilt für  $n \geq k$

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

Also

$$|a - b| < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{|a - b|}{2} = |a - b| \quad \text{!} \quad \square$$

**Definition.** (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge  $(a_n)$  heißt *Nullfolge*  $\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  konvergiert gegen 0.

**Beispiele.**

1.  $\left(\frac{1}{n}\right)$  und  $(0)$  sind triviale Beispiele für Nullfolgen.

3/1/8/1

2. Es sei  $|a| < 1$  und  $(a_n) = (a^n)$ .

3/1/8/2

Um nachzuweisen, daß  $(a^n)$  eine Nullfolge ist, g.z.z.:

Wenn  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  :  $|a^n - 0| < \varepsilon$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $a = 0$  ist die Behauptung trivial.

Es sei jetzt  $a \neq 0$ . Wegen  $|a| < 1$  ist  $\frac{1}{|a|} > 1$ .

Nach dem Korollar zur Bernoullischen Ungleichung existiert für  $\frac{1}{\varepsilon}$  eine natürliche Zahl

$n_0$ , so daß  $\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ . Folglich ist  $\frac{1}{|a_0|^{n_0}} > \frac{1}{\varepsilon}$ , also  $|a|^{n_0} < \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0$  gilt

damit  $|a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \varepsilon$ .

**Satz 3.2**  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \iff (a_n - a)$  konvergiert gegen 0.

3/1/9

**Beweis.** Trivial.  $\square$

3/1/10

**Definition.** (*Beschränktheit bei Folgen*)

3/1/11

Sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

(1)  $(a_n)$  ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*

$\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c$  (bzw.  $c \leq a_n$ ) für jedes  $n$ .

- (2)  $(a_n)$  ist *beschränkt*  
 $\stackrel{\text{Def}}{=} (a_n)$  ist nach oben und nach unten beschränkt.

**Folgerung.**  $(a_n)$  ist beschränkt gdw ein  $c \in \mathbb{R}$  existiert, so daß  $|a_n| \leq c$ . 3/1/12

**Beispiel.**  $(a_n) = \left(\frac{100^n}{n!}\right)$  ist beschränkt. 3/1/13

$$\left(\frac{100^n}{n!}\right) = \left(\underbrace{\frac{100^0}{0!}}_1, \underbrace{\frac{100^1}{1!}}_{100}, \underbrace{\frac{100^2}{2!}}_{5000}, \dots, \frac{100^{100}}{100!}, \frac{100^{101}}{101!}, \dots\right)$$

0 ist offenbar eine untere Schranke von  $(a_n)$ .

Es bleibt noch nachzuweisen, daß es auch eine obere Schranke gibt, obwohl es aufgrund der ersten Glieder nicht so zu sein scheint.

Für  $n \geq 100$  und  $n = 100 + k$  ist

$$a_n = \frac{100^{100+k}}{(100+k)!} = \frac{100^{100}}{100!} \cdot \underbrace{\frac{100^k}{101 \cdot 102 \cdots (100+k)}}_{<1} \leq \frac{100^{100}}{100!} = a_{100}.$$

Für  $n < 100$  ist offensichtlich  $a_n \leq a_{100}$ . Folglich ist  $a_{100}$  eine obere Schranke von  $(a_n)$ .

**Bemerkung.**  $\left(\frac{100^n}{n!}\right)$  ist sogar eine Nullfolge. Denn für  $n = 100 + k$  und  $k \geq 0$  ist

$$a_n = \frac{100^{100+k}}{(100+k)!} = \underbrace{\frac{100^{100}}{100!}}_{:=c} \cdot \underbrace{\frac{100^k}{101 \cdot 102 \cdots (100+k)}}_{\leq \frac{100}{100+k}} \leq c \cdot \frac{100}{100+k};$$

und für beliebiges  $\varepsilon > 0$  ist dann

$$\frac{c \cdot 100}{100+k} < \varepsilon \iff \frac{c \cdot 100}{\varepsilon} < 100+k = n,$$

d.h., für fast alle  $n$  gilt  $|a_n - 0| = |a_{100+k}| < \varepsilon$ .

**Satz 3.3** Jede konvergente Folge ist beschränkt. 3/1/14

**Beweis.** Es sei  $(a_n)$  konvergent gegen  $a$ . 3/1/15

Für  $\varepsilon = 1$  existiert dann ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ .

Es sei  $d := \max\{|a_0 - a| : n < n_0\}$ ,  $\implies |a_n - a| \leq d$  für alle  $n < n_0$ .

Für beliebige  $n$  gilt dann:  $|a_n - a| < 1 + d$ . Hieraus erhält man

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<1+d} + |a| < 1 + d + |a| := c.$$

Folglich ist  $(a_n)$  beschränkt.  $\square$

**Definition.** (*Häufungspunkt einer Folge*)

3/1/16

Es sei  $(a_n)$  eine Folge und  $a \in \mathbb{R}$ .

$a$  ist ein *Häufungspunkt* (oder *Verdichtungspunkt*) von  $(a_n)$

$\equiv_{\text{Df}}$  In jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen unendlich viele Folgenglieder  $a_n$   
(die untereinander auch gleich sein dürfen, d.h., für jedes  $\varepsilon > 0$  und für jedes  $n_0$   
gibt es ein  $n \geq n_0$ , so daß  $|a_n - a| < \varepsilon$ ).

**Satz 3.4** Jede beschränkte Folge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

3/1/17

**Beweis.** Sei  $(a_n)$  beschränkt und  $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

3/1/18

1. Fall:  $M$  ist endlich.

Dann müssen unendlich viele Folgenglieder untereinander gleich sein:

$a_{n_0} = a_{n_1} = a_{n_2} = \dots := a$ . Folglich ist  $a$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)$ .

2. Fall:  $M$  ist unendlich.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt  $M$  als nicht-leere und beschränkte Menge einen Häufungspunkt  $a$ . Dieses  $a$  ist dann auch Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Es gibt Folgen, die nicht beschränkt sind und

3/1/19

- (a) keinen Häufungspunkt besitzen,
- (b) genau einen Häufungspunkt besitzen,
- (c) für jedes  $k \in \mathbb{N}$  genau  $k$  Häufungspunkte besitzen bzw.
- (d) unendlich viele Häufungspunkte besitzen.

**Beispiele.**

- (a)  $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$  (kein Häufungspunkt)
- (b)  $(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$  (genau ein Häufungspunkt)
- (c)  $(a_n) = (1, \dots, k, 1, 1, \dots, k, 2, 1, \dots, k, 3, 1, \dots, k, 4, \dots)$  (genau  $k$  Häufungspunkte)
- (d) Übungsaufgabe!

**Definition.** (*Teilfolge*)

3/1/20

Es sei  $(a_n)$  eine Folge und  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  (d.h.,  $n_i < n_j$  für  $i < j$ ;  $i, j \in \mathbb{N}$ ).

Dann heißt  $(a_{n_i})_{i=0,1,2,\dots}$  *Teilfolge* von  $(a_n)$ .

**Satz 3.5**  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \iff$  jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ . 3/1/21

**Beweis.** ( $\longrightarrow$ ) Sei  $a_n \rightarrow a$  und  $(a_{n_i})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ . 3/1/22

Wegen  $a_n \rightarrow a$  gilt: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $m_0$ , so daß für jedes  $n \geq m_0$ :  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Das gilt insbesondere für alle  $n_i \geq m_0$ . Offenbar ist  $n_i \geq i$  und damit  $|a_{n_i} - a| < \varepsilon$  für alle  $i \geq m_0$ .

( $\longleftarrow$ ) trivial, denn  $(a_n)$  ist eine spezielle Teilfolge von sich selbst.  $\square$

**Satz 3.6** Ist  $a$  ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ , dann existiert eine Teilfolge von  $(a_n)$ , die gegen  $a$  konvergiert. 3/1/23

**Beweis.** Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)$ . 3/1/24

Dann gilt: Für jedes  $\varepsilon > 0$  und für jedes  $n_0$  existiert ein  $n \geq n_0$ , so daß  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Für  $n = 1, 2, 3, \dots$  wählen wir  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ .

Damit erhält man:

für  $\varepsilon_1 = 1$  und  $n_0 = 1$  gibt es ein  $n_1 \geq n_0$ , so daß  $|a_{n_1} - a| < \varepsilon_1 = 1$ ;

für  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$  und  $n_0 = n_1 + 1$  gibt es ein  $n_2 \geq n_0$ , so daß  $|a_{n_2} - a| < \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ ;

für  $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$  und  $n_0 = n_2 + 1$  gibt es ein  $n_3 \geq n_0$ , so daß  $|a_{n_3} - a| < \varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ ;

$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$

Wegen  $n_0 := 0 < n_1 < n_2 < \dots$  ist  $(a_{n_i})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ , und  $(a_{n_i})$  konvergiert offenbar gegen  $a$ .  $\square$

**Korollar.** Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge. 3/1/25

**Beweis.** Sei  $(a_n)$  beschränkt. Dann besitzt  $(a_n)$  einen Häufungspunkt (nach Satz 3.4) 3/1/26 und schließlich eine konvergente Teilfolge (nach Satz 3.6).  $\square$

**Definition.** (*Limes superior, Limes inferior*) 3/1/27

Es sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge von reellen Zahlen und  $H(a_n)$  die Menge aller Häufungspunkte (oder *Limites* von konvergenten Teilfolgen) von  $(a_n)$ .

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \left( := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \stackrel{\text{Df}}{=} \sup H(a_n)$ .

$\sup H(a_n)$  heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von  $(a_n)$  [:= größter Häufungspunkt in  $H(a_n)$ ].

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \left( := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \stackrel{\text{Df}}{=} \inf H(a_n), .$

$\inf H(a_n)$  heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von  $(a_n)$   $[:=$  kleinster Häufungspunkt in  $H(a_n)]$ .

**Bemerkung.** Die Definition ist korrekt, denn

3/1/28

- (1)  $H(a_n) \neq \emptyset$ , da  $(a_n)$  beschränkt ist.
- (2)  $H(a_n)$  ist beschränkt, denn  $(a_n)$  ist beschränkt; folglich existieren  $\sup H(a_n)$  und  $\inf H(a_n)$ .
- (3) Mit Satz 2.10 läßt sich zeigen, daß  $\sup H(a_n) = \max H(a_n)$  und  $\inf H(a_n) = \min H(a_n)$ .  
(Übungsaufgabe!)

**Satz 3.7** Für beschränkte Folgen  $(a_n)$  sind die Bedingungen (1) – (3) äquivalent:

3/1/29

- (1)  $(a_n)$  ist konvergent.
- (2)  $(a_n)$  besitzt genau einen Häufungspunkt.
- (3)  $\lim a_n = \overline{\lim} a_n$ .

**Beweis.** Übungsaufgabe!  $\square$

3/1/30

**Definition.** (*monoton wachsend* bzw. *monoton fallend*)

3/1/31

Sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

- (1)  $(a_n)$  ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)  
 $\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $n$  gilt:  $a_n \leq a_{n+1}$  (bzw.  $a_{n+1} \leq a_n$ ).
- (2)  $(a_n)$  ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)  
 $\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $n$  gilt:  $a_n < a_{n+1}$  (bzw.  $a_{n+1} < a_n$ ).

Für „monoton wachsend“ bzw. „monoton fallend“ schreiben wir gelegentlich auch einfach „*monoton*“.

3/1/32

**Satz 3.8** Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.

3/1/33

**Beweis.** ( $\longrightarrow$ ) Konvergente Folgen sind beschränkt (nach Satz 3.3; hierzu ist die Monotonie nicht notwendig).

3/1/34

( $\longleftarrow$ ) Sei  $(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt (für „fallend“ verläuft der Beweis analog). z.z.:  $(a_n)$  ist konvergent.

Sei  $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Behauptung:  $a_n \rightarrow a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung ist  $a$  kleinste obere Schranke von  $(a_n)$ , d.h., ist  $a' < a$ , dann ist  $a'$  keine obere Schranke von  $(a_n)$ . Sei  $a' = a - \varepsilon$ , dann existiert ein Folgenglied  $a_{n_0}$ , so daß  $a - \varepsilon < a_{n_0}$ . Da  $(a_n)$  monoton wächst, gilt für alle  $n \geq n_0$ :

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a, \quad \text{also} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_0. \quad \square$$

**Beispiel.** (Definition der *Eulerschen Zahl*  $e$ )

3/1/35

Sei  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Behauptung:  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend und beschränkt. (Dann ist  $(a_n)$  nach Satz 3.8 konvergent.)

z.z.: 1.  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$  und  
2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Zu 1. g.z.z.:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  (denn alle  $a_n$  sind positiv).

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\&= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\&= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n}_{\geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \\&\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \quad (\text{nach der Bernoullischen Ungleichung}) \\&= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \quad \text{denn}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} > 1 &\iff (n+2)(n^2 + n + 1) > (n+1)(n^2 + 2n + 1) \\&\iff n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1\end{aligned}$$

(und die letzte Ungleichung gilt offensichtlich).

Also  $a_n < a_{n+1}$  für jedes  $n$ , und damit ist  $(a_n)$  streng monoton wachsend.

Zu 2.  $(a_n)$  ist beschränkt.

Offenbar ist  $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_n$  für jedes  $n$ .

Weiterhin ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} := b_n.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Folge  $(b_n)$  streng monoton fällt.



g.z.z.:  $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$  (denn alle  $b_n$  sind positiv).

Der Beweis hierzu verläuft ähnlich wie für  $(a_n)$ , er wird als Übungsaufgabe gestellt.  
Damit haben wir

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \geq b_n \text{ für jedes } n.$$

Also

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4.$$

Dann ist  $(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also konvergent und  $(b_n)$  monoton fallend und beschränkt, und somit auch konvergent.

Folglich existieren Zahlen  $e$  und  $e'$ , so daß

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e'.$$

Behauptung:  $e = e'$ .

Annahme:  $e \neq e'$ .

Dann ist  $\varepsilon := |e - e'| > 0$ , und folglich gilt für hinreichend große  $n$

$$\begin{aligned} |e - e'| &= |e - a_n + a_n - b_n + b_n - e'| \leq \underbrace{|e - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |a_n - b_n| + \underbrace{|b_n - e'|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 4} \cdot \frac{1}{n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } \frac{12}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\varepsilon = |e - e'| < \varepsilon$  **!**

Also  $e = e'$ .

### Bemerkung.

3/1/36

Wegen  $2 \leq a_n < e = e' < b_n \leq 4$  ist  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ;

folglich läßt sich  $e$  beliebig genau durch rationale Zahlen annähern:  $e \approx 2,7183\dots$ ,  
allerdings ist  $e$  selbst nicht rational.

**Satz 3.9** (*Cauchysches Konvergenzkriterium*)

3/1/37

Eine Folge  $(a_n)$  ist konvergent (in  $\mathbb{R}$ ) gdw

für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß für jedes  $m, n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

**Beweis.** ( $\longrightarrow$ ) Sei  $(a_n)$  konvergent,  $a_n \rightarrow a$ .

3/1/38

Nach Definition existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$ , so daß für  $n \geq n_0$  stets gilt:  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Folglich ist

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \text{für } m, n \geq n_0.$$

( $\longleftarrow$ ) Wir zeigen zunächst, daß  $(a_n)$  beschränkt ist.

Es sei  $\varepsilon = 1$ . Dann existiert ein  $n_0$ , so daß  $|a_n - a_m| < 1$  für jedes  $m, n \geq n_0$ .

Für  $m = n_0$  ist insbesondere  $|a_n - a_{n_0}| < 1$ .

Wir wählen  $d = \max\{|a_i - a_{n_0}| : i = 0, \dots, n_0 - 1\}$ .

Dann gilt für beliebige  $n$

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + d + |a_{n_0}| := c.$$

Folglich ist  $(a_n)$  beschränkt. Damit besitzt  $(a_n)$  einen Häufungspunkt  $a$  und eine konvergierende Teilfolge  $(a_{n_i})$  mit  $a_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} a$ . (Korollar zu Satz 3.6; Satz 3.4)

Nach Definition gilt dann:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $m_0$ , so daß für jedes  $n_i \geq m_0$  gilt:  $|a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Nach Voraussetzung existiert ein  $m'_0$ , so daß für jedes  $m, n \geq m'_0$  gilt:  $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Für  $n, n_i \geq m_0, m'_0$  gilt dann

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_i}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_i} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Also  $a_n \rightarrow a$ .  $\square$

**Definition.** (*Cauchyfolge oder Fundamentalfolge*)

3/1/39

$(a_n)$  ist eine *Cauchyfolge* (oder *Fundamentalfolge*)

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n, m \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

**Korollar.** *Cauchyfolgen konvergieren in  $\mathbb{R}$ .*

3/1/40

**Beweis.** Der Beweis ist nach Satz 3.9 trivial.  $\square$

3/1/41

Da Cauchyfolgen in  $\mathbb{R}$  konvergieren, nennt man  $\mathbb{R}$  auch *vollständig* (bez. der Konvergenz) 3/1/42

von Cauchyfolgen).

In diesem Sinne ist  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig, denn  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ist z.B. eine Cauchyfolge in  $\mathbb{Q}$ , aber sie ist in  $\mathbb{Q}$  nicht konvergent.

Wir betrachten jetzt wieder Folgen in  $\mathbb{R}$ .

**Satz 3.10** (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen und  $c, d$  seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1)  $(c \cdot a_n)$  ist konvergent und  $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$ .
- (2)  $(a_n + b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ .
- (3)  $(a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ .
- (4) Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  konvergent und  $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}$ .
- (4') Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent und  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ .
- (5)  $(|a_n|)$  ist konvergent und  $\lim |a_n| = |\lim a_n|$ .
- (6) Ist  $a_n \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .  
Ist insbesondere  $a_n \leq d$  bzw.  $d \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq d$  bzw.  $d \leq \lim b_n$ .

**Beweis.** Es sei  $\lim a_n = a, \lim b_n = b$  und sei  $\varepsilon > 0$ .

3/1/44/1

(1). Es ist  $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| := (\star)$ .

1. Fall:  $c = 0$ .  $\implies (\star) < \varepsilon$  für jedes  $n \geq 0$ .

2. Fall:  $c \neq 0$ .  $\implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$  für fast alle  $n$ .

Damit erhält man

$$|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \text{für fast alle } n.$$

In jedem Fall ist also

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot a = c \cdot \lim a_n.$$

(2). Nach Voraussetzung gilt:  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ .

Folglich existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$ :

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus erhält man

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

für  $n \geq n_0$ .

Also

$$\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n.$$

(3). Es soll  $|a_n \cdot b_n - a \cdot b|$  durch  $\varepsilon$  „abgeschätzt“ werden, und zwar für fast alle  $n$ . Es ist bekannt, daß  $|a_n - a|$ ,  $|b_n - b|$  „klein“ werden für hinreichend große  $n$ . Wir beginnen zu rechnen und versuchen ein  $n_0$  so zu finden, daß die Abschätzung gelingt.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= \underbrace{|a_n|}_{?} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\text{klein}} + |b| \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{\text{klein}} := (\star\star) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $(a_n)$  konvergent, also auch beschränkt durch ein  $c > 0$ , d.h.,  $|a_n| \leq c$ .

Daraus ergibt sich

$$|a_n| \cdot |b_n - b| \leq c \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Dies gilt aber nach (1) für hinreichend große  $n$ .

Analog gilt auch  $|b| \cdot |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  für große  $n$ .

Damit erhält man insgesamt  $(\star\star) < \varepsilon$ .

(4). Um diese Behauptung beweisen zu können, benötigen wir zunächst ein

**Lemma.** Wenn  $\lim b_n = b \neq 0$ , dann existiert ein  $m_0$ , so daß für jedes  $n \geq m_0$  gilt: 3/1/44/2  
 $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ .

**Beweis.** Sei  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ . Wegen  $b_n \rightarrow b$  gibt es ein  $m_0$ , so daß für jedes  $n \geq m_0$  gilt: 3/1/44/3  
 $|b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$ .

Weiterhin gilt:

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$-\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$\frac{|b|}{2} < |b_n| < \frac{3}{2} \cdot |b| \implies$$

$$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}. \quad \square$$

Beweis zu (4). Es ist

3/1/44/4

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| \\ &= \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\leq \frac{2}{|b|}} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| := (\star\star\star). \end{aligned}$$

Wegen  $b_n \rightarrow b$  existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |b|^2. \implies (\star\star\star) < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Also  $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b_n}$ .

(4'). Wegen  $b_n \neq 0$ ,  $b_n \rightarrow b$  und  $b \neq 0$  gilt  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . Da auch  $a_n \rightarrow a$  erhält man mit (3)

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \implies$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

(5). Es ist  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$  für hinreichend große  $n$ .  $\implies |a_n| \rightarrow |a|$ .

Also  $\lim |a_n| = |a| = |\lim a_n|$ .

(6). Sei  $c_n := b_n - a_n$  ( $\geq 0$ ).

g.z.z.:  $\lim c_n \geq 0$ .

Denn dann gilt ja

$$0 \leq \lim c_n = \lim(b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n \implies$$

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Annahme:  $\lim c_n := c < 0$ .

Sei  $\varepsilon = \frac{|c|}{2} = -\frac{c}{2}$ . Dann liegen in  $U_\varepsilon(c)$  fast alle  $c_n$ .  $\implies$

$$c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon, \text{ also } c - \left(-\frac{c}{2}\right) < c_n < c + \left(-\frac{c}{2}\right) \implies$$

$$\frac{3}{2} \cdot c < c_n < \frac{c}{2} < 0 \quad \text{!}$$

Ist speziell  $a_n \leq d$ , so ist  $\lim a_n \leq \lim d = d$  ( $d$  als konstante Folge betrachtet).

Analoges gilt für  $d \leq b_n$ .  $\square$

**Definition.** (*bestimmte Divergenz*)

3/1/45

Es sei  $(a_n)$  eine Folge von reellen Zahlen.

$(a_n)$  *divergiert bestimmt* gegen  $+\infty$  (bzw. gegen  $-\infty$ )

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } c \in \mathbb{R} \text{ existiert ein } n_0, \text{ so daß für jedes } n \geq n_0 \text{ gilt:}$   
 $c \leq a_n \text{ (bzw. } a_n \leq c).$

**Bez.:**  $\lim a_n = +\infty$  bzw.  $\lim a_n = -\infty$  oder auch  
 $a_n \rightarrow \infty$  bzw.  $a_n \rightarrow -\infty$

**Beispiel.**  $(a_n) = (2^n)$  ist bestimmt divergent gegen  $+\infty$ .

3/1/46

Denn ist  $c \in \mathbb{R}$ , dann existiert ein  $n_0$  mit  $c \leq n_0 \leq 2^{n_0}$ . Folglich gilt für  $n \geq n_0$  :  
 $c \leq n_0 \leq 2^{n_0} \leq 2^n = a_n$ .

Aber:  $(a_n) = ((-2)^n)$  ist divergent, jedoch nicht bestimmt divergent.

**Satz 3.11** Ist  $(a_n)$  bestimmt divergent und  $(b_n)$  beschränkt, dann ist  $(a_n + b_n)$  bestimmt divergent.

3/1/47

**Beweis.** Übungsaufgabe!  $\square$

3/1/48