

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

### 3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Abschließend betrachten wir noch Funktionenfolgen. Dazu sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $M$  definierte Funktion. Weiterhin sei auch  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $M$  definiert. 3/2/10

**Definition.** (Konvergenz von Funktionenfolgen)

(1) Die Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert an der Stelle  $a \in M$  gegen  $b$

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = b.$$

(2)  $(f_n)$  konvergiert in  $M$  gegen die Funktion  $f$

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a),$$

(d.h., für jedes fixierte  $a \in M$  konvergiert die Zahlenfolge  $(f_n(a))$  gegen die Zahl  $f(a)$ ; diese Art Konvergenz nennen wir auch *punktweise Konvergenz*).

$$\text{Bez.: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

(3)  $(f_n)$  konvergiert in  $M$

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert eine Funktion } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so daß } (f_n) \text{ in } M \text{ gegen } f \text{ konvergiert.}$

**Beispiel.** Es sei  $M = [0, 1]$  und  $f_n(x) = x^n$ .

3/2/11

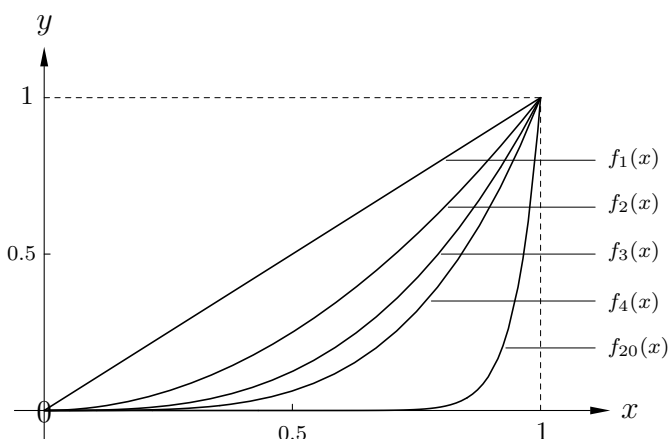


Abb. 3.1 zeigt die Konvergenz von Funktionenfolgen. Mit wachsendem  $n$  nähern sich die Funktionen  $f_n(x)$  in dem Intervall  $[0, 1)$  der  $x$ -Achse. Für  $x = 1$  gilt stets  $f_n(x) = 1$ .

Für jedes fixierte  $a \in [0, 1]$  mit  $a < 1$  gilt offenbar  $a^n \rightarrow 0$ ; für  $a = 1$  ist  $a^n = 1$ , also  $a^n \rightarrow 1$ .

Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$