

Kapitel 2

Reelle Zahlen

Es sei \mathbb{Q} die geordnete Menge der rationalen Zahlen und A, B seien nicht-leere Teilmengen von \mathbb{Q} . Das Paar (A, B) heißt *Dedekindscher Schnitt* in \mathbb{Q} , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 2/0/1

- (1) $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt: Wenn $x \in A$ und $y \in B$, so $x < y$.

Der Dedekindsche Schnitt (A, B) definiert eine Zerlegung von \mathbb{Q} in zwei disjunkte Klassen, wobei A *Unterklasse* und B *Oberklasse* bei der Zerlegung genannt wird. Der Eindeutigkeit wegen betrachten wir nur solche Schnitte, bei denen die jeweilige Unterklasse kein größtes Element enthält. Diese reichen aus, um die reellen Zahlen zu definieren.

Für B gibt es zwei Möglichkeiten:

1. B enthält eine kleinste rationale Zahl, d.h., es existiert ein $r \in B$, so daß $r \leq x$ für jedes $x \in B$.
2. B enthält keine kleinste rationale Zahl.

Im ersten Fall legt der Dedekindsche Schnitt die *rationale Zahl* r fest, im zweiten Fall bestimmt (A, B) eine sogenannte *Lücke*. Die „Lücken“ werden als die *irrationalen Zahlen* interpretiert. Die Menge der *reellen Zahlen* wird dann als Menge aller Dedekindschen Schnitte definiert. Eine reelle Zahl ist also nach dieser Definition ein Dedekindscher Schnitt. Das eigentliche Problem besteht nun darin, in der Menge der so gegebenen reellen Zahlen eine Addition und eine Multiplikation zu definieren und eine Ordnungsrelation festzulegen. Hierzu muß aber auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Es bleibt noch die Frage zu diskutieren, ob es überhaupt irrationale Zahlen gibt. Es könnte doch sein, daß für jeden Dedekindschen Schnitt die entsprechende Oberklasse ein kleinstes Element enthält. Dazu betrachten wir den Schnitt (A, B) , so daß 2/0/2

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \text{ und } 2 \leq x^2\}; \text{ und } A = \mathbb{Q} \setminus B.$$

Angenommen, B enthält ein kleinstes Element r . Dann ist $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$ und $r^2 = 2$. (Wäre $r^2 > 2$, dann ließe sich eine rationale Zahl $r' > 0$ konstruieren mit $r' < r$ und $2 \leq r'^2 < r^2$. Damit ist r nicht kleinstes Element in B .) Folglich existieren positive ganze Zahlen m und n , so daß $r = \frac{m}{n}$. m und n seien o.B.d.A. teilerfremd. Dann gilt:

$$2 = r^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \text{ und damit } 2n^2 = m^2.$$

Also $2|m^2$. Da 2 eine Primzahl ist, gilt auch $2|m$. Folglich existiert eine natürliche Zahl k , so daß $m = 2k$. Damit haben wir $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ und schließlich $n^2 = 2k^2$. Also $2|n^2$ und somit $2|n$. Folglich ist 2 ein Teiler von m und n . Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß m und n teilerfremd sind. Damit bestimmt (A, B) eine Lücke, also eine irrationale Zahl.

Dies zeigt, daß $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

Wir befassen uns nun mit den grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen.

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Cauchyfolge* oder *Fundamentalfolge*)

3/1/39

(a_n) ist eine *Cauchyfolge* (oder *Fundamentalfolge*)

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Definition. (*grenzwertgleich*)

3/2/3

Es seien $(a_n), (b_n)$ Cauchyfolgen.

(a_n) und (b_n) sind *grenzwertgleich*

$\overline{\text{Df}}$ $(a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge.

Es sei M eine Menge und \sim eine zweistellige Relation in M .

3/2/5

\sim heißt *Äquivalenzrelation* in M

$\overline{\text{Df}}$ Für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- | | |
|--|-----------------|
| (1) $a \sim a$, | (Reflexivität) |
| (2) wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so $a \sim c$, | (Transitivität) |
| (3) wenn $a \sim b$, so $b \sim a$. | (Symmetrie) |

Ein Mengensystem $S = \{M_i : i \in I\}$ mit einer Indexmenge I heißt *Klasseneinteilung* oder *Partition* oder *Zerlegung* von M

3/2/6

$\overline{\text{Df}}$ (1) $M_i \subseteq M$ und $M_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

(2) $\bigcup_{i \in I} M_i = M$, und für jedes $i, j \in I$ mit $i \neq j$ ist $M_i \cap M_j = \emptyset$.

(vgl. z.B. Literaturangabe [4], Teil I, Seiten 43 – 44.)

Eine Äquivalenzrelation \sim in M zieht eine Klasseneinteilung von M nach sich; jeweils äquivalente Elemente gehören der gleichen Klasse an (dies müßte natürlich bewiesen werden). Die so entstehenden Klassen heißen auch *Äquivalenzklassen*.

Ist M die Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen und \sim die Grenzwertgleichheit in M , dann wird M in Äquivalenzklassen grenzwertgleicher Cauchyfolgen zerlegt. Damit sind neue mathematische Objekte entstanden, die (wie Dedekindsche Schnitte) ebenfalls als reelle Zahlen interpretiert werden können.

Literaturhinweise

- [4] Endl, K. und W. Luh: Analysis I u. II. Eine integrierte Darstellung. Aula-Verlag, Wiesbaden. 11/1/4