

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*

$\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n)$ konvergiert gegen 0.

Definition. (*Cauchyfolge* oder *Fundamentalfolge*)

3/1/39

(a_n) ist eine *Cauchyfolge* (oder *Fundamentalfolge*)

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } n_0, \text{ so daß für jedes } n, m \geq n_0 \text{ gilt: } |a_n - a_m| < \varepsilon.$

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Definition. (*grenzwertgleich*)

3/2/3

Es seien $(a_n), (b_n)$ Cauchyfolgen.

(a_n) und (b_n) sind *grenzwertgleich*

$\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge.

Ein Mengensystem $S = \{M_i : i \in I\}$ mit einer Indexmenge I heißt *Klasseneinteilung* oder *Partition* oder *Zerlegung* von M

3/2/6

$\stackrel{\text{Df}}{=} (1) M_i \subseteq M \text{ und } M_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I.$

$(2) \bigcup_{i \in I} M_i = M, \text{ und für jedes } i, j \in I \text{ mit } i \neq j \text{ ist } M_i \cap M_j = \emptyset.$

(vgl. z.B. Literaturangabe [4], Teil I, Seiten 43 – 44.)

Eine Äquivalenzrelation \sim in M zieht eine Klasseneinteilung von M nach sich; jeweils äquivalente Elemente gehören der gleichen Klasse an (dies müßte natürlich bewiesen werden). Die so entstehenden Klassen heißen auch *Äquivalenzklassen*.

Ist M die Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen und \sim die Grenzwertgleichheit in M , dann wird M in Äquivalenzklassen grenzwertgleicher Cauchyfolgen zerlegt. Damit sind neue mathematische Objekte entstanden, die (wie Dedekindsche Schnitte) ebenfalls als reelle Zahlen interpretiert werden können.

Definition. (*reelle Zahlen*)

3/2/7

a ist eine reelle Zahl

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es gibt eine Cauchyfolge } (a_n) \text{ von rationalen Zahlen, so daß } a \text{ die Äquivalenzklasse aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen ist, die mit } (a_n) \text{ grenzwertgleich sind.}$

Bez.: $a = \langle a_n \rangle = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (a_n - b_n) \text{ ist eine Nullfolge}\}.$