

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Satz 3.12 Zu jeder reellen Zahl a existiert eine Cauchyfolge (a_n) von rationalen Zahlen, so daß $\lim a_n = a$. 3/2/1

Beweis. (Idee) Sei $a \in \mathbb{R}$. Man konstruiert eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ von rationalen Zahlen mit $a_n \leq a \leq b_n$ und $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$. 3/2/2

Dazu seien a_0, b_0 beliebige rationale Zahlen mit $a_0 < a \leq b_0$.

Weiterhin seien a_n, b_n (nach Induktionsvoraussetzung) schon mit den geforderten Eigenschaften gegeben.

Ist $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, dann ist $c_{n+1} \in \mathbb{Q}$.

Jetzt definieren wir a_{n+1}, b_{n+1} wie folgt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= c_{n+1} \text{ und } b_{n+1} := b_n, \text{ falls } c_{n+1} < a \text{ und} \\ a_{n+1} &:= a_n \text{ und } b_{n+1} := c_{n+1}, \text{ falls } c_{n+1} \geq a. \end{aligned}$$

Behauptung: $a_n \rightarrow a$ (und $b_n \rightarrow b$).

Es ist $a_n \leq a \leq b_n \implies a - a_n \leq b_n - a_n < \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies a_n \rightarrow a$. □

Definition. (grenzwertgleich) 3/2/3

Es seien $(a_n), (b_n)$ Cauchyfolgen.

(a_n) und (b_n) sind grenzwertgleich

$\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sind z.B. grenzwertgleiche Cauchyfolgen im Bereich der rationalen Zahlen. 3/2/4

Bemerkung. „Grenzwertgleich“ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen. (Beweis mit Satz 3.10 trivial).

Dabei ist der Begriff *Äquivalenzrelation* wie folgt definiert:

Es sei M eine Menge und \sim eine zweistellige Relation in M . 3/2/5

\sim heißt *Äquivalenzrelation* in M

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für alle } a, b, c \in M \text{ gilt:}$

- | | |
|--|-----------------|
| (1) $a \sim a$, | (Reflexivität) |
| (2) wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so $a \sim c$, | (Transitivität) |
| (3) wenn $a \sim b$, so $b \sim a$. | (Symmetrie) |

Ein Mengensystem $S = \{M_i : i \in I\}$ mit einer Indexmenge I heißt *Klasseneinteilung* oder *Partition* oder *Zerlegung* von M 3/2/6

- $\overline{\text{Df}}$ (1) $M_i \subseteq M$ und $M_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.
 (2) $\bigcup_{i \in I} M_i = M$, und für jedes $i, j \in I$ mit $i \neq j$ ist $M_i \cap M_j = \emptyset$.

(vgl. z.B. Literaturangabe [4], Teil I, Seiten 43 – 44.)

Eine Äquivalenzrelation \sim in M zieht eine Klasseneinteilung von M nach sich; jeweils äquivalente Elemente gehören der gleichen Klasse an (dies müßte natürlich bewiesen werden). Die so entstehenden Klassen heißen auch *Äquivalenzklassen*.

Ist M die Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen und \sim die Grenzwertgleichheit in M , dann wird M in Äquivalenzklassen grenzwertgleicher Cauchyfolgen zerlegt. Damit sind neue mathematische Objekte entstanden, die (wie Dedekindsche Schnitte) ebenfalls als reelle Zahlen interpretiert werden können.

Definition. (*reelle Zahlen*) 3/2/7

a ist eine reelle Zahl

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Cauchyfolge (a_n) von rationalen Zahlen, so daß a die Äquivalenzklasse aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen ist, die mit (a_n) grenzwertgleich sind.

Bez.: $a = \langle a_n \rangle = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (a_n - b_n) \text{ ist eine Nullfolge}\}.$

Jede Cauchyfolge (b_n) mit $(b_n) \in a = \langle a_n \rangle$ ist ein *Repräsentant* der Klasse a . Die Menge der betrachteten Äquivalenzklassen heißt *Menge der reellen Zahlen* und wird mit \mathbb{R} bezeichnet. 3/2/8

Beispielsweise ist $e = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (b_n) \text{ ist mit } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ grenzwertgleich}\}.$

Damit \mathbb{R} ein geordneter Körper wird, benötigen wir noch Rechenoperationen $+$ und \cdot und eine Ordnungsrelation $<$ in \mathbb{R} . Die Definitionen der Operationen und der Relation erfolgen mit Hilfe von Repräsentanten.

Es seien a, b reelle Zahlen. Folglich gibt es Cauchyfolgen $(a_n), (b_n)$ in \mathbb{Q} , so daß $a = \langle a_n \rangle, b = \langle b_n \rangle$. Dann sei: 3/2/9

$$a \pm b = \langle a_n \rangle \pm \langle b_n \rangle \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \langle a_n \pm b_n \rangle \text{ für alle } n,$$

$$a \cdot b = \langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \langle a_n \cdot b_n \rangle \text{ für alle } n, \text{ und}$$

$$a < b \iff \langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle \text{ und } a_n < b_n \text{ für fast alle } n.$$

($\langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle$ bedeutet, daß (a_n) und (b_n) nicht grenzwertgleich sind.)

$$-\langle a_n \rangle \stackrel{\overline{\text{Df}}}{=} \langle -a_n \rangle,$$

$$\frac{1}{\langle a_n \rangle} \stackrel{\text{Df}}{=} \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle; \quad \text{Voraussetzung: } a_n \neq 0 \text{ und } (a_n) \text{ ist keine Nullfolge.}$$

Die Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Repräsentanten; dies bedeutet z.B. für die Addition:

Sind (a'_n) und (b'_n) andere Repräsentanten von a bzw. b , dann muß dies zum gleichen Ergebnis führen, d.h.,

$$\text{wenn } (a_n) \sim (a'_n) \text{ und } (b_n) \sim (b'_n), \text{ so ist } (a_n + b_n) \sim (a'_n + b'_n).$$

Dies bedeutet dann nämlich, daß $\langle a_n + b_n \rangle = \langle a'_n + b'_n \rangle$, womit die gleiche reelle Zahl festgelegt ist.

Analog verfährt man mit den anderen Fällen.

Mit den so eingeführten Funktionen $+$ und \cdot und der Relation $<$ bildet die Menge der reellen Zahlen (= Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen) einen archimedisch geordneten Körper, in dem das Intervallschachtelungsaxiom gilt. Dieser Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt! (Dies hätte natürlich alles bewiesen werden müssen.)

Abschließend betrachten wir noch Funktionenfolgen. Dazu sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in M definierte Funktion. Weiterhin sei auch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert. 3/2/10

Definition. (*Konvergenz von Funktionenfolgen*)

(1) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert an der Stelle $a \in M$ gegen b

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = b.$$

(2) (f_n) konvergiert in M gegen die Funktion f

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a),$$

(d.h., für jedes fixierte $a \in M$ konvergiert die Zahlenfolge $(f_n(a))$ gegen die Zahl $f(a)$; diese Art Konvergenz nennen wir auch *punktweise Konvergenz*).

$$\text{Bez.: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

(3) (f_n) konvergiert in M

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert eine Funktion } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so daß } (f_n) \text{ in } M \text{ gegen } f \text{ konvergiert.}$$

Beispiel. Es sei $M = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$.

3/2/11

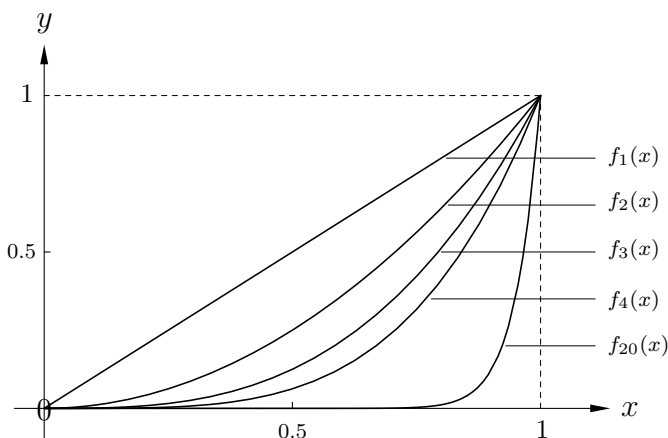


Abb. 3.1 zeigt die Konvergenz von Funktionenfolgen. Mit wachsendem n nähern sich die Funktionen $f_n(x)$ in dem Intervall $[0, 1)$ der x -Achse. Für $x = 1$ gilt stets $f_n(x) = 1$.

Für jedes fixierte $a \in [0, 1]$ mit $a < 1$ gilt offenbar $a^n \rightarrow 0$; für $a = 1$ ist $a^n = 1$, also $a^n \rightarrow 1$.

Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in M gleichmäßig gegen f

Df Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in M$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Die folgende Abbildung veranschaulicht, daß sich bei der gleichmäßigen Konvergenz für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_n(x)$ von $f(x)$ an jeder Stelle $x \in M = [a, b]$ um weniger als ε unterscheiden, falls n hinreichend groß ist; man sagt dafür auch, daß die Funktionen $f_n(x)$ in dem ε -Streifen von $f(x)$ liegen.

3/2/13

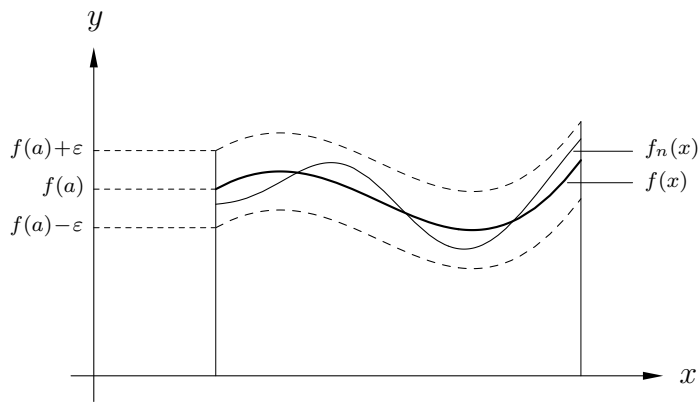


Abb. 3.1 veranschaulicht die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. Der ε -Streifen von $f(x)$ ist durch die gestrichelten Kurven dargestellt.

Die im vorhergehenden Beispiel betrachtete Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ ist nicht gleichmäßig konvergent in $[0, 1]$.

Angenommen doch, dann gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in [0, 1]$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$. Dies gilt insbesondere für $m = n_0$ und für alle $x \in [0, 1)$; hier ist zusätzlich $f(x) = 0$. Also $|f_m(x)| < \frac{1}{2}$ für alle x mit $0 \leq x < 1$. Wir wählen jetzt x „hinreichend dicht“ bei 1; $x := 1 - \delta$ mit $\delta > 0$. Dann gilt nach der Bernoullischen Ungleichung: $x^m = (1 - \delta)^m \geq 1 - m\delta$ (m fixiert). Sei δ so klein, daß $m\delta < \frac{1}{2}$, dann ist $\frac{1}{2} < x^m = |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ **N!**

In den späteren Abschnitten über Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen werden wir uns ausführlicher mit den Eigenschaften der Grenzfunktion befassen.