

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen ist die *vollständige Induktion*. Sie beruht auf dem

Induktionsaxiom:

Es sei E eine Eigenschaft für natürliche Zahlen n . Dann gilt

$$E(0) \wedge \forall n (E(n) \rightarrow E(n+1)) \rightarrow \forall m E(m).$$

Um die Aussage $\forall m E(m)$ zu beweisen, genügt es:

1. $E(0)$ zu zeigen (*Anfangsschritt*) und
2. $\forall n (E(n) \rightarrow E(n+1))$ nachzuweisen (*Induktionsschritt*).

Bei der Eigenschaft 2. betrachtet man ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und zeigt:

Wenn $E(n)$, so $E(n+1)$.

$E(n)$ heißt *Induktionsvoraussetzung*, $E(n+1)$ *Induktionsbehauptung*.

Eigentlich müßte beim Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

Fall (a): $E(n)$ ist falsch.

Dann ist die Implikation $E(n) \rightarrow E(n+1)$ aber trivialerweise richtig. Daher läßt man diesen Fall im Induktionsbeweis in der Regel weg und betrachtet nur noch

Fall (b): $E(n)$ ist richtig.

Unter dieser Voraussetzung ist dann die Gültigkeit von $E(n+1)$ zu zeigen.

Achtung: Häufig findet man bei „Anfängern“ die folgende falsche Formulierung im Induktionsschritt:

„Für beliebiges n wird vorausgesetzt, daß $E(n)$ schon gilt.“

Wer dies so formuliert, hat die Behauptung bereits vorausgesetzt.

Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Satz 2.2 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

2/2/3

(0) $0 < 1$.

(1) *nicht* $(a < a)$. (Irreflexivität)

(2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. (Transitivität)

(3) Für jedes a, b gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$. (Konnexität)

Bemerkung. Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome für die irreflexive Ordnung*.

(3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Trichotomie)

(4) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)

(5) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$,

Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.

(6) Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, so $a + c \leq b + d$.

Ist zusätzlich $a < b$ oder $c < d$, so ist $a + c < b + d$.

(7) Es gilt: $a < b \iff -b < -a$.

(8) Wenn $0 < a$ und $0 < b$, so $0 < a \cdot b$,

Wenn $0 < a$ und $b < 0$, so $a \cdot b < 0$,

Wenn $a < 0$ und $b < 0$, so $0 < a \cdot b$.

(9) Wenn $0 < a$, so $0 < \frac{1}{a}$,

Wenn $a < 0$, so $\frac{1}{a} < 0$.

(10) Wenn $0 < a < b$, so $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,

Wenn $a < 0 < b$, so $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$,

Wenn $a < b < 0$, so $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.

(11) Wenn $0 < a$, dann gibt es natürliche Zahlen m und n , so daß $0 < a < m$ und $0 < \frac{1}{n} < a$.

(12) Wenn $a < b$, so $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (Cauchyfolge oder Fundamentalfolge)

3/1/39

(a_n) ist eine Cauchyfolge (oder Fundamentalfolge)

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Übungsaufgaben

17. Zeigen Sie:

3/3/17

(a) Die Folge (a_n) mit den induktiv definierten Folgegliedern

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) \quad \text{für } n \geq 2$$

ist eine Cauchyfolge.

(b) Ist (a_n) induktiv definiert durch

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 3,$$

dann besitzt die Folge (a_n) den Grenzwert $\frac{2}{3}$.

[Hinweis: $a_n - \frac{2}{3} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3}$ für $n \geq 1$.]