

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

**Satz 2.2** Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

2/2/3

- (0)  $0 < 1$ .
- (1) *nicht*  $(a < a)$ . (Irreflexivität)
- (2) Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ . (Transitivität)
- (3) Für jedes  $a, b$  gilt:  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $b < a$ . (Konnexität)
- Bemerkung.** Die Eigenschaften (1) – (3) sind die Axiome für die irreflexive Ordnung.
- (3') Es gilt genau eine der drei Beziehungen:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ . (Trichotomie)
- (4) Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . (Monotonie der Addition)
- (5) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ ,  
Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
- (6) Wenn  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , so  $a + c \leq b + d$ .  
Ist zusätzlich  $a < b$  oder  $c < d$ , so ist  $a + c < b + d$ .
- (7) Es gilt:  $a < b \iff -b < -a$ .
- (8) Wenn  $0 < a$  und  $0 < b$ , so  $0 < a \cdot b$ ,  
Wenn  $0 < a$  und  $b < 0$ , so  $a \cdot b < 0$ ,  
Wenn  $a < 0$  und  $b < 0$ , so  $0 < a \cdot b$ .
- (9) Wenn  $0 < a$ , so  $0 < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0$ , so  $\frac{1}{a} < 0$ .
- (10) Wenn  $0 < a < b$ , so  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ,  
Wenn  $a < 0 < b$ , so  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ ,  
Wenn  $a < b < 0$ , so  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .
- (11) Wenn  $0 < a$ , dann gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so daß  $0 < a < m$  und  $0 < \frac{1}{n} < a$ .
- (12) Wenn  $a < b$ , so  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.****3/1/2**

- (1)  $(a_n)$  konvergiert (oder ist konvergent) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$  Es existiert ein  $a \in \mathbb{R}$ , so daß  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert.
- (2)  $(a_n)$  divergiert (oder ist divergent) in  $\mathbb{R}$   
 $\overline{\text{Df}}$   $(a_n)$  ist nicht konvergent in  $\mathbb{R}$ .

**Satz 3.10** (Eigenschaften konvergenter Folgen)**3/1/43**

Es seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen und  $c, d$  seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1)  $(c \cdot a_n)$  ist konvergent und  $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$ .
- (2)  $(a_n + b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ .
- (3)  $(a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und  $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ .
- (4) Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  konvergent und  

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle  $b_n \neq 0$  und ist  $\lim b_n \neq 0$ , dann ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent  
und 
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$
- (5)  $(|a_n|)$  ist konvergent und  $\lim |a_n| = |\lim a_n|$ .
- (6) Ist  $a_n \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .  
Ist insbesondere  $a_n \leq d$  bzw.  $d \leq b_n$  für jedes  $n$ , dann ist  $\lim a_n \leq d$   
bzw.  $d \leq \lim b_n$ .

**Übungsaufgaben**

5. Zeigen Sie: (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1$ , (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**3/3/5**

8. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte von

**3/3/8**

- (a)  $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ , (c)  $\left(\frac{4n^3 + 2n^2 + 7}{7n^3 + n^2 + n - 1}\right)$ , (e)  $\left((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}\right)$ ,  
(b)  $\left(\frac{n!}{k^n}\right)$ ,  $k \geq 1$ , (d)  $\left(\frac{n^3 + \sqrt{n^3 + 1}}{3n^2 + \sqrt{n^2 - 1}}\right)$ , (f)  $\left(\sqrt[n]{2n}\right)$ .