

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Satz 3.12 Zu jeder reellen Zahl a existiert eine Cauchyfolge (a_n) von rationalen Zahlen, so daß $\lim a_n = a$. 3/2/1

Definition. (*grenzwertgleich*) 3/2/3
 Es seien $(a_n), (b_n)$ Cauchyfolgen.
 (a_n) und (b_n) sind *grenzwertgleich*
 $\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge.

Es sei M eine Menge und \sim eine zweistellige Relation in M . 3/2/5
 \sim heißt *Äquivalenzrelation* in M
 $\stackrel{\text{Df}}{=}$ Für alle $a, b, c \in M$ gilt:
 (1) $a \sim a$, (Reflexivität)
 (2) wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so $a \sim c$, (Transitivität)
 (3) wenn $a \sim b$, so $b \sim a$. (Symmetrie)

Ein Mengensystem $S = \{M_i : i \in I\}$ mit einer Indexmenge I heißt *Klasseneinteilung* oder *Partition* oder *Zerlegung* von M 3/2/6

$\stackrel{\text{Df}}{=}$ (1) $M_i \subseteq M$ und $M_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.
 (2) $\bigcup_{i \in I} M_i = M$, und für jedes $i, j \in I$ mit $i \neq j$ ist $M_i \cap M_j = \emptyset$.

(vgl. z.B. Literaturangabe [4], Teil I, Seiten 43 – 44.)

Eine Äquivalenzrelation \sim in M zieht eine Klasseneinteilung von M nach sich; jeweils äquivalente Elemente gehören der gleichen Klasse an (dies müßte natürlich bewiesen werden). Die so entstehenden Klassen heißen auch *Äquivalenzklassen*.

Ist M die Menge aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen und \sim die Grenzwertgleichheit in M , dann wird M in Äquivalenzklassen grenzwertgleicher Cauchyfolgen zerlegt. Damit sind neue mathematische Objekte entstanden, die (wie Dedekindsche Schnitte) ebenfalls als reelle Zahlen interpretiert werden können.

Definition. (*reelle Zahlen*) 3/2/7
 a ist eine reelle Zahl
 $\stackrel{\text{Df}}{=}$ Es gibt eine Cauchyfolge (a_n) von rationalen Zahlen, so daß a die Äquivalenzklasse aller Cauchyfolgen von rationalen Zahlen ist, die mit (a_n) grenzwertgleich sind.

Bez.: $a = \langle a_n \rangle = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (a_n - b_n) \text{ ist eine Nullfolge}\}.$

Jede Cauchyfolge (b_n) mit $(b_n) \in a = \langle a_n \rangle$ ist ein *Repräsentant* der Klasse a . Die 3/2/8

Menge der betrachteten Äquivalenzklassen heißt *Menge der reellen Zahlen* und wird mit \mathbb{R} bezeichnet.

Beispielsweise ist $e = \{(b_n) : b_n \in \mathbb{Q} \text{ und } (b_n) \text{ ist mit } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ grenzwertgleich}\}.$

Damit \mathbb{R} ein geordneter Körper wird, benötigen wir noch Rechenoperationen $+$ und \cdot und eine Ordnungsrelation $<$ in \mathbb{R} . Die Definitionen der Operationen und der Relation erfolgen mit Hilfe von Repräsentanten.

Es seien a, b reelle Zahlen. Folglich gibt es Cauchyfolgen $(a_n), (b_n)$ in \mathbb{Q} ,
so daß $a = \langle a_n \rangle$, $b = \langle b_n \rangle$. Dann sei:

3/2/9

$$a \pm b = \langle a_n \rangle \pm \langle b_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle a_n \pm b_n \rangle \text{ für alle } n,$$

$$a \cdot b = \langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle a_n \cdot b_n \rangle \text{ für alle } n, \text{ und}$$

$$a < b \iff \langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle \text{ und } a_n < b_n \text{ für fast alle } n.$$

($\langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle$ bedeutet, daß (a_n) und (b_n) nicht grenzwertgleich sind.)

$$-\langle a_n \rangle \stackrel{\text{Df}}{=} \langle -a_n \rangle,$$

$$\frac{1}{\langle a_n \rangle} \stackrel{\text{Df}}{=} \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle; \quad \text{Voraussetzung: } a_n \neq 0 \text{ und } (a_n) \text{ ist keine Nullfolge.}$$

Die Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Repräsentanten; dies bedeutet z.B. für die Addition:

Sind (a'_n) und (b'_n) andere Repräsentanten von a bzw. b , dann muß dies zum gleichen Ergebnis führen, d.h.,

$$\text{wenn } (a_n) \sim (a'_n) \text{ und } (b_n) \sim (b'_n), \text{ so ist } (a_n + b_n) \sim (a'_n + b'_n).$$

Dies bedeutet dann nämlich, daß $\langle a_n + b_n \rangle = \langle a'_n + b'_n \rangle$, womit die gleiche reelle Zahl festgelegt ist.

Analog verfährt man mit den anderen Fällen.

Mit den so eingeführten Funktionen $+$ und \cdot und der Relation $<$ bildet die Menge der reellen Zahlen (= Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen) einen archimedisch geordneten Körper, in dem das Intervallschachtelungsaxiom gilt. Dieser Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt! (Dies hätte natürlich alles bewiesen werden müssen.)

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 3

- Definition der reellen Zahlen mit Hilfe von Cauchyfolgen rationaler Zahlen (Überblick).

3/4/13