

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Beispiele.

2. Es sei $|a| < 1$ und $(a_n) = (a^n)$.

3/1/8/2

Um nachzuweisen, daß (a^n) eine Nullfolge ist, g.z.z.:

Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$: $|a^n - 0| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$. Für $a = 0$ ist die Behauptung trivial.

Es sei jetzt $a \neq 0$. Wegen $|a| < 1$ ist $\frac{1}{|a|} > 1$.

Nach dem Korollar zur Bernoullischen Ungleichung existiert für $\frac{1}{\varepsilon}$ eine natürliche Zahl n_0 , so daß $\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$. Folglich ist $\frac{1}{|a_0|^{n_0}} > \frac{1}{\varepsilon}$, also $|a|^{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt damit $|a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \varepsilon$.

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

Definition. (Reihe)

4/0/1

Es sei $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von reellen Zahlen.

Die Folge $(S_n)_{n=0,1,2,\dots}$ mit $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ heißt *Folge der Partialsummen* von (a_n) oder *unendliche Reihe* (kurz *Reihe*).

$$\text{Bez.: } (S_n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum a_i$$

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes der Reihe*.

Beispiel. (Geometrische Reihe)

4/1/3

Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.

Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; $(\sum a^i$ heißt *geometrische Reihe*).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$ ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \cdots + a^n)(1-a) = 1 + \cdots + a^n - (a + \cdots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n -ten Partialsumme berechnet.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$