

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Um den Konvergenzbegriff möglichst anschaulich zu formulieren, sagen wir auch: 3/1/1
 In jeder ε -Umgebung von a liegen *fast alle* Folgenglieder a_n . „Fast alle“ bedeutet „alle, mit Ausnahme höchstens endlich vieler“.

Definition. (*Beschränktheit bei Folgen*) 3/1/11

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

- (1) (a_n) ist *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}}$ Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $c \leq a_n$) für jedes n .
- (2) (a_n) ist *beschränkt*
 $\overline{\text{Df}}$ (a_n) ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Limes superior, Limes inferior*) 3/1/27

Es sei (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte (oder *Limites* von konvergenten Teilfolgen) von (a_n) .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \left(:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \quad \overline{\text{Df}} \quad \sup H(a_n).$

$\sup H(a_n)$ heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von (a_n) [:= größter Häufungspunkt in $H(a_n)$].

$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \left(:= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \quad \overline{\text{Df}} \quad \inf H(a_n),$

$\inf H(a_n)$ heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von (a_n) [:= kleinster Häufungspunkt in $H(a_n)$].

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Divergenz von Reihen*) 4/1/2

$\sum a_i$ ist *divergent* $\overline{\text{Df}}$ $\sum a_i$ ist nicht konvergent.

Definition. (*absolute Konvergenz*) 4/1/15

$\sum a_i$ ist *absolut konvergent* $\overline{\text{Df}}$ $\sum |a_i|$ ist konvergent.

Satz 4.9 (Wurzelkriterium)

4/1/35

Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Bemerkung. Für die Anwendung des Wurzelkriteriums genügt es, daß $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ für fast alle i . (Offenbar folgt aus $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ sofort $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$.)

4/1/37

Ist andererseits (a_i) beschränkt und $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} := c < 1$, so ist $\sqrt[i]{|a_i|} \leq \underbrace{c + \frac{1-c}{2}}_{:= q < 1}$ für

fast alle i ; folglich ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

Ist also $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$, so ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

Analog erhält man: Wenn $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für fast alle i , so ist $\sum a_i$ divergent.

Achtung: Für die Konvergenz von $\sum a_i$ reicht es noch nicht, daß stets $\sqrt[i]{|a_i|} < 1$ (bzw. $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = 1$) ist;

z.B. für $a_i = \frac{1}{i}$ ist $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} < 1$, denn $\frac{1}{i} < 1$ (bzw. $\overline{\lim} \frac{1}{i} = 1$). Aber $\sum \frac{1}{i}$ ist nicht konvergent.

Wenn $\lim \sqrt[i]{|a_i|}$ existiert, dann ist offenbar $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = \lim \sqrt[i]{|a_i|}$, und man rechnet nur mit dem Limes.