

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Definition.** (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge  $(a_n)$  heißt *Nullfolge*

$\stackrel{\text{Df}}{=} (a_n)$  konvergiert gegen 0.

## Kapitel 4

### Unendliche Reihen; Potenzreihen

#### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Korollar 3.** Ist  $(a_i)$  keine Nullfolge, so ist  $\sum a_i$  divergent.

4/1/12

**Definition.** (*absolute Konvergenz*)

4/1/15

$\sum a_i$  ist absolut konvergent  $\stackrel{\text{Df}}{=} \sum |a_i|$  ist konvergent.

**Definition.** (*Minorante, Majorante*)

4/1/31

Es seien  $\sum a_i, \sum b_i$  Reihen mit nicht-negativen Gliedern.

$\sum a_i$  heißt *Minorante* von  $\sum b_i$  und gleichzeitig heißt  $\sum b_i$  *Majorante* von  $\sum a_i$   
 $\stackrel{\text{Df}}{=} a_i \leq b_i$  für alle  $i$ .

**Satz 4.8** (*Majorantenkriterium*)

4/1/32

Es seien  $\sum a_i, \sum b_i$  Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei  $\sum b_i$  eine Majorante von  $\sum a_i$ . Dann gilt:

- (1) Ist  $\sum b_i$  konvergent, so ist auch  $\sum a_i$  konvergent.
- (2) Ist  $\sum a_i$  divergent, so ist auch  $\sum b_i$  divergent.

**Satz 4.10** (*Quotientenkriterium*)

4/1/38

Es sei  $a_i \neq 0$  für jedes  $i$ . Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ ,  
dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$  für jedes  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

**Beweis.** (1). Sei  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ . Dann ist  $|a_{i+1}| \leq q \cdot |a_i|$  für alle  $i$ , folglich gilt

4/1/39

$$|a_i| \leq q \cdot |a_{i-1}| \leq q^2 \cdot |a_{i-2}| \leq \cdots \leq q^i \cdot |a_0|.$$

Damit ist  $\sum |a_0| \cdot q^i = |a_0| \cdot \sum q^i$  eine konvergente Majorante von  $\sum |a_i|$ , folglich ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.

(2). Sei jetzt  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$  für alle  $i$ . Dann ist  $|a_{i+1}| \geq |a_i| \geq \cdots \geq |a_0|$  und  $|a_0| > 0$  (nach Voraussetzung). Folglich ist  $(a_i)$  keine Nullfolge und damit  $\sum a_i$  divergent.  $\square$