

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*Nullfolge*)

3/1/7

Eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*
 $\overline{\text{Df}}$ (a_n) konvergiert gegen 0.

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\overline{\text{Df}}$ (S_n) konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes der Reihe*.

Definition. (*Divergenz von Reihen*)

4/1/2

$\sum a_i$ ist *divergent* $\overline{\text{Df}}$ $\sum a_i$ ist nicht konvergent.

Definition. (*alternierende Reihe*)

4/1/24

$\sum a_i$ heißt *alternierend*
 $\overline{\text{Df}}$ $a_i \neq 0$ und $a_i < 0$ gdw $a_{i+1} > 0$ für jedes i
 (oder aber $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ für jedes i).

Beispiele.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**)

4/1/30/3

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n -te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n}$$

$$\begin{aligned} & \text{(jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \frac{1}{2^{n+1}}) \\ & \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \cdots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n} \\ &= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Satz 4.10 (*Quotientenkriterium*)

4/1/38

Es sei $a_i \neq 0$ für jedes i . Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für jedes i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

3. Wir betrachten jetzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ und zeigen, daß diese Reihe für gewisse Werte $a \in \mathbb{R}$ konvergiert und für andere Werte divergiert.

4/1/43

Es sei zunächst $|a| < 1$, $a \neq 0$. Wir benutzen das Quotientenkriterium. Für $q = |a|$ und für fast alle n gilt

$$\left| \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} \right| = |a| \cdot \frac{n}{n+1} \leq q < 1.$$

Ist $|a| = 1$, so erhält man für $a = 1$ die harmonische Reihe (diese ist divergent) und für $a = -1$ eine konvergente alternierende Reihe.

Es sei nun $|a| > 1$. Dann ist $\left(\frac{a^n}{n}\right)$ keine Nullfolge, und somit $\sum \frac{a^n}{n}$ nicht konvergent.