

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (Konvergenz von Reihen)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann Wert oder Limes der Reihe.

Satz 4.8 (Majorantenkriterium)

4/1/32

Es seien $\sum a_i, \sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

Satz 4.9 (Wurzelkriterium)

4/1/35

Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$, dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Satz 4.10 (Quotientenkriterium)

4/1/38

Es sei $a_i \neq 0$ für jedes i . Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$, dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für jedes i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

4. Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4/1/44

Die Konvergenz dieser Reihe kann man weder mit dem Wurzel- noch mit dem Quotientenkriterium nachweisen (bitte ausprobieren!). Für eine geeignete konvergente Majorante könnte man das Majorantenkriterium heranziehen.

Es ist $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent. Denn

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \implies$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist $S_k \rightarrow 1$, und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ eine konvergente Majorante von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ erhält man die Behauptung.