

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition. (*monoton wachsend bzw. monoton fallend*)

3/1/31

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.

- (1) (a_n) ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*)
 $\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).
- (2) (a_n) ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*)
 $\overline{\text{Df}}$ Für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$).

Satz 3.8 *Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.*

3/1/33

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\overline{\text{Df}}$ (S_n) konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes* der Reihe.

Satz 4.9 (*Wurzelkriterium*)

4/1/35

Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Satz 4.10 (*Quotientenkriterium*)

4/1/38

Es sei $a_i \neq 0$ für jedes i . Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$ für jedes i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

5. Wir betrachten jetzt ein Beispiel für eine Reihe, bei der das Quotientenkriterium versagt (das Wurzelkriterium ließe sich anwenden).

4/1/45

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots.$$

Folglich ist $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann gilt für alle geraden n : $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und folglich $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$.

Die Reihe ist aber konvergent, denn es ist $S_k = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k$ für

gerade k und damit $S_k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2$.

Für beliebige k ist (S_k) monoton wachsend und beschränkt, also auch konvergent.